MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

21. BAND 1./2. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 24. JULI 1924)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

21. Band. **Inhalt:** 1./2. Heft.

Seite

Pollaczek, F., Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitswurzeln 1
Kowalewski, G., Über die neuen Methoden zur Berechnung von Differentialinvarianten 39
Study, E., Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil III. 45
Weinstein, A., Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone . . 72
Horn, J., Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen 85
Müntz, Ch. H., Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation . 96
Besikowitsch, A., Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen 111
Tamarkin, J., und A. Besikowitsch. Über die asymptotischen Ausdrücke für die Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen 119
Landau, E., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden 126
Urysohn, P., Ein Beitrag zur Theorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges 133
Pasch, M., Die natürliche Geometrie 151
Berwald, L., und Ph. Frank, Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme 154
Hölder, O., Berichtigung zu der Abhandlung: Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit 20, S. 7—20 160

Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitswurzeln.

Von

F. Pollaczek in Berlin.

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen sind einer Untersuchung des Kreiskörpers $K(\varepsilon)$ der l^2-ten und des Körpers $K(\zeta)$ der l-ten Einheitswurzeln für den Fall, daß die Klassenanzahl dieser Körper durch die Primzahl l teilbar ist, gewidmet. Solche Primzahlen werden bekanntlich als irreguläre bezeichnet, und die Eigenschaften des Kreiskörpers sind wesentlich verschieden, je nachdem l regulär ist oder nicht, wie z. B. aus der Entwicklung der Reziprozitätsgesetze für die l-ten Potenzreste hervorgeht. Wir befassen uns hauptsächlich mit der Klassengruppe und denjenigen ihrer Elemente, deren Ordnungen durch l teilbar sind, den „irregulären Idealklassen", und stellen für die einfachsten, zahlenmäßig nachprüfbaren Fälle die irreguläre Klassengruppe des $K(\varepsilon)$ auf. Da diese Gruppe wesentlich von der des Körpers $K(\zeta)$ abhängt, befassen wir uns auch mit den entsprechenden Fragen für die Körper der l-ten Einheitswurzeln. Nach dem einführenden Satz I leiten wir zunächst vier Sätze (II—V) ab, die eine für unsere Zwecke geeignete Darstellung der Einheiten und Idealklassen beider Körper liefern. Dann behandeln wir zuerst die Eigenschaften der Klassen von $K(\zeta)$ (Satz VI—IX) und geben danach zwei Sätze (X, Xa) über die Klassengruppe des $K(\varepsilon)$, worauf wir die Eigenschaften der Körper für den einfachsten Fall eines irregulären l ausführlicher darlegen. Der letzte Paragraph ist der Besprechung der vorhandenen Literatur gewidmet.

Bei unserer Beweisführung bedienen wir uns in ausgedehntem Maße der Eigenschaft der Kreiskörper, Normalkörper zu sein, und verwenden eine Art symbolischer Matrizenrechnung, die als Verallgemeinerung der Hilbertschen symbolischen Potenzierung („Zahlbericht", § 54) angesehen werden kann.

Des weiteren stützen wir uns auf die Furtwänglersche Klassenkörpertheorie und verwenden Teilergebnisse der nachstehenden Furtwänglerschen Arbeiten:

„Über die Reziprozitätsgesetze der l-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, worin l eine ungerade Primzahl bedeutet", Math. Ann. **58**, S. 1—50 (zitiert als F. I).

„Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers", Math. Ann. **63**, S. 1—37 (zitiert als F. II).

„Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern", I. Teil Math. Ann. **67**, S. 1—29 (zitiert als F. III); II. Teil Math. Ann. **72**, S. 346—386 (zitiert als F. IV).

„Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper", Göttinger Nachrichten 1911, S. 293—317 (zitiert als F. V).

„Über eine Eigenschaft der Kreiskörper", Journal für reine und angewandte Mathematik **140**, S. 29—32 (zitiert als F. VI).

Um aber bei dem Leser nicht die Kenntnis dieser Arbeiten voraussetzen zu müssen, stellen wir hier die hauptsächlichsten, von uns benötigten Ergebnisse zusammen; hierbei behalten wir die volle Allgemeinheit der Furtwänglerschen Sätze bei, obwohl sich unsere Anwendungen meist auf ganz spezielle Zahlkörper k, nämlich den $K(\zeta)$ und den $K(\varepsilon)$, beziehen.

Unter l werde eine ungerade Primzahl verstanden und unter k ein beliebiger, die primitive l-te Einheitswurzel ζ enthaltender algebraischer Zahlkörper; in jedem Körper k ist bekanntlich die Einführung eines Symboles $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}_p}\right)$ für die l-ten Potenzreste und Nichtreste nach den Primidealen $\mathfrak{j}_p$ von k möglich (siehe F. I § 1); die allgemeine Erklärung des Symbols $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}}\right)$ wird hier auf solche Ideale $\mathfrak{j}$ beschränkt, die zu l teilerfremd sind.

Definition 1. *Eine ganze oder gebrochene Zahl α aus k, deren Zähler und Nenner zu l prim sind, heißt primär, wenn die Kongruenz $x^l \equiv \alpha$, mod $l\lambda$ innerhalb k eine Lösung hat; hierbei ist $\lambda = 1 - \zeta$ gesetzt.*

Definition 2. *Eine ganze oder gebrochene Zahl α aus k, deren Zähler und Nenner zu l prim sind, heißt hyperprimär, wenn die Kongruenz $x^l \equiv \alpha$, mod $l\lambda\mathfrak{L}$ innerhalb k eine Lösung hat; hierbei ist gesetzt $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 \ldots \mathfrak{L}_z$, während die Zerlegung von λ in (voneinander verschiedene) Primideale des Körpers k $(\lambda) = \mathfrak{L}_1^{a_1}\mathfrak{L}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{L}_z^{a_z}$ lautet.* (F. I § 13, Definition 12).

Definition 3. *Eine ganze oder gebrochene Zahl ω aus k heißt eine singuläre Primärzahl des Körpers k, wenn sie* 1. *primär ist und wenn* 2. *das Hauptideal (ω) die l-te Potenz eines Ideals aus k ist (dies ist*

z. B. erfüllt, falls ω eine Einheit ist), jedoch die Zahl ω nicht l-te Potenz einer Zahl aus k ist (F. II § 3, S. 9).

Die Klassenzahl des Körpers k möge $H = l^h q$ $(q \not\equiv 0, \mod l)$ sein, und eine Normalbasis für die Gruppe der q-ten Potenzen der Idealklassen von k möge durch die e Klassen $c_1, \ldots, c_e$ von den resp. Ordnungen $l^{h_1'}, \ldots, l^{h_e'}$ gebildet werden (in anderer Ausdrucksweise: es mögen genau e unter den „Invarianten" der Abelschen Gruppe der Idealklassen von k Potenzen von l sein).

Nun lauten Furtwänglers fundamentale Resultate:

Satz A. *In k gibt es genau e singuläre Primärzahlen $\omega_1, \ldots, \omega_e$, die multiplikativ voneinander unabhängig sind, d. h. für die aus einer Gleichung $\omega_1^{x_1} \omega_2^{x_2} \ldots \omega_e^{x_e} = \alpha^l$ (mit einer Zahl α aus k) $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_e \equiv 0, \mod l$ folgt* (F. II § 7, S. 18).

Satz B. *Es sei ω_0 eine singuläre Primärzahl in k; dann gehört zu ω_0 eine eindeutig bestimmte Untergruppe $\mathfrak{G}_{\omega_0}$ der vollen Klassengruppe $\mathfrak{H}$ von k vom Index l bzw. von der Ordnung $\frac{H}{l}$, derart, daß für alle Ideale $\mathfrak{j}_{\omega_0}$ der Gruppe $\mathfrak{G}_{\omega_0}$*

$$\left(\frac{\omega_0}{\mathfrak{j}_{\omega_0}}\right) = 1$$

ist, während für alle übrigen Ideale aus $\mathfrak{H}$

$$\left(\frac{\omega_0}{\mathfrak{j}}\right) \neq 1$$

gilt. Sämtliche singulären Primärzahlen, zu denen in diesem Sinne $\mathfrak{G}_{\omega_0}$ gehört, sind in der Form $\omega_0^x \alpha^l$ enthalten. (F. III § 16, Satz 10 und in anderer äußerer Einkleidung F. IV § 4, Satz 6.)

Ferner kann unmittelbar aus Satz B gefolgert werden:

Satz C. *Wenn c eine Idealklasse bezeichnet, die nicht der Untergruppe $\mathfrak{G}_{\omega_0}$ angehört, und wenn $\mathfrak{H}$ folgendermaßen in Nebengruppen zu $\mathfrak{G}_{\omega_0}$ zerlegt wird: $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\omega_0} + c\,\mathfrak{G}_{\omega_0} + \ldots + c^{l-1}\,\mathfrak{G}_{\omega_0}$, so erhält $\left(\frac{\omega_0}{\mathfrak{j}}\right)$ für alle Ideale einer und derselben Nebengruppe einen konstanten Wert, insbesondere nimmt $\left(\frac{\omega_0}{\mathfrak{j}}\right)$ für zwei äquivalente Ideale denselben Wert an.*

Daß die in Satz B angeführte Eigenschaft nur den singulären Primärzahlen eines Körpers allein zukommt, besagt Satz D.

Satz D. *Ist die Zahl μ aus k nicht singuläre Primärzahl (und nicht l-te Potenz in k), so gibt es in jeder Idealklasse von k Primideale $\mathfrak{j}_p$, für die $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{j}_p}\right) = 1$ ist.*

Ein relativ-zyklischer Oberkörper von k vom Relativgrad l werde mit K bezeichnet; bei der hier über k gemachten Voraussetzung kann K

durch Adjunktion der l-ten Wurzel aus einer gewissen Zahl μ von k erzeugt werden, d. h. $K = K(\sqrt[l]{\mu}, k)$; eine Erzeugende der Substitutionen der Relativgruppe von K bezüglich k heiße, wie üblich, $S = (\sqrt[l]{\mu} : \zeta_1 \sqrt[l]{\mu})$.

Sei nun $\mathfrak{j}_p$ ein zu l primes Primideal aus k, so folgt in bekannter Weise (F. I § 2) aus $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}_p}\right) = 1$, daß $\mathfrak{j}_p$ im $K(\sqrt[l]{\alpha}, k)$ in l Primideale zerfällt, aus $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}_p}\right) \neq 1$ folgt dagegen, daß $\mathfrak{j}_p$ im $K(\sqrt[l]{\alpha}, k)$ nicht weiter zerlegt wird. Wenden wir dies auf den $K(\sqrt[l]{\omega_0}, k)$ an, so folgt aus Satz B:

Satz E. *Es sei ω_0 eine singuläre Primärzahl in k, dann zerfallen in $K(\sqrt[l]{\omega_0}, k)$ alle und nur diejenigen Primideale $\mathfrak{j}_p$ aus k weiter (in je l Primideale des $K(\sqrt[l]{\omega_0}, k)$), deren Idealklassen der Untergruppe $\mathfrak{G}_{\omega_0}$ angehören* (F. V § 1, Satz III). Hingegen folgt aus Satz D:

Satz F. *Ist die Zahl μ aus k nicht singuläre Primzahl (und nicht l-te Potenz), so gibt es in jeder Idealklasse von k Primideale, die in K weiter zerlegt werden.*

Komplexe. (Siehe D. Hilbert, „Über die Theorie des relativ quadratischen Zahlkörpers", Math. Ann. **51**, § 22.) Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_{h'}$ diejenigen Klassen eines relativ zyklischen Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, die Ideale aus k enthalten, und C sei eine beliebige Idealklasse aus K. Das System von Idealklassen $P = \{Cc_1, \ldots, Cc_{h'}\}$ wird als ein durch die Klasse C erzeugter Klassenkomplex und das System $I = \{c_1, \ldots, c_{h'}\}$ selbst als Hauptkomplex bezeichnet. Als Produkt zweier durch die Klassen C_1, C_2 erzeugter Komplexe P_1, P_2 wird der durch die Klasse $C_1 C_2$ erzeugte Komplex $P_1 P_2$ definiert.

Definition 4. Ein (von dem Hauptkomplex I verschiedener) Komplex P_A, der mit dem relativ-konjugierten Komplex P_A^S übereinstimmt, heißt ambiger Komplex; ein Komplex ist offenbar dann und nur dann ambig, wenn für eine ihn erzeugende Klasse C_A $C_A^{1-S} = c_i$ gilt, wobei c_i eine Klasse von I ist. Aus

$$C_A^{1-S} = c_i \quad \text{und} \quad C_A^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = c_{i'}$$

folgt

$$C_A^l = c_{i'} \quad \text{und} \quad P_A^l = I.$$

Es werden nun n ambige Komplexe $P_{A,1}, \ldots, P_{A,n}$ dann unabhängig voneinander genannt, wenn aus einer jeden Relation $P_{A,1}^{x_1} P_{A,2}^{x_2} \ldots P_{A,n}^{x_n} = I$

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \equiv 0, \mod l$$

folgt. Die Höchstzahl der voneinander unabhängigen Komplexe in K wird

mit a bezeichnet, und die Abschätzung dieser Zahl a ist der Ausgangspunkt für die Beweise der Klassenkörpertheorie.

Es gilt, wenn e dieselbe Bedeutung hat wie in Satz B:

Satz G. *Wenn ω_0 eine singuläre Primzahl von k ist, so ist die Anzahl aller unabhängigen ambigen Komplexe in $K(\sqrt[l]{\omega_0}, k)$*

$$a = e - 1 \tag{1}$$

(F. II § 8, Satz 6).

Satz H. *Wenn die Zahl μ aus k nicht singuläre Primärzahl ist, so ist in $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$*

$$a \geqq e. \tag{1'}$$

Satz J. *Wenn in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ ein einziges Primideal von k enthalten ist, so ist*

$$a = e. \tag{1''}$$

(Die Sätze H und J folgen aus den Überlegungen in F. III § 2, S. 8 u. 9.)

Die Klassenzahl von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ möge $H_K = l^m Q$ $(Q \not\equiv 0, \bmod l)$ sein; mit dieser Bezeichnung gilt

Satz K. *Das System der Q-ten Potenzen der Idealklassen von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, d. i. das System derjenigen Idealklassen von k, deren Ordnungen Potenzen von l sind, kann eindeutig in der Form*

$$C_1^{F_1(S)} C_2^{F_2(S)} \dots C_a^{F_a(S)} c \tag{2}$$

dargestellt werden, wobei $C_1, \dots, C_a$ a bestimmte Klassen von K sind, c die Q-ten Potenzen der Klassen des Hauptkomplexes durchläuft und a die früher angeführte Bedeutung hat. Für die Klassen C_i gilt

$$C_i^{(1-S)^{p_i}} = c_i', \quad C_i^{(1-S)^{p_i-1}} \neq c \qquad (i = 1, 2, \dots, a) \tag{2'}$$

mit gewissen ganzen rationalen Zahlen $p_i > 0$. Die Darstellung (2) ist eindeutig, sobald jede der Zahlen $F_i(\zeta)$ nur $\bmod (1-\zeta)^{p_i}$ bestimmt wird.

(F. II § 6, Satz 4; hierbei ist zu bemerken, daß ebenda beim Beweis des zitierten Satzes die Eigenschaft des Körpers K, durch die l-te Wurzel aus einer singulären Primärzahl erzeugt zu werden, nicht benutzt wird.)

§ 1.

Bei der Untersuchung des Falles, daß die Klassenzahl H_{l^2} des Körpers $K(\varepsilon)$ der l^2-ten Einheitswurzel ε durch die Primzahl l teilbar ist, kann man sich auf die sogenannten irregulären Primzahlen beschränken,

für die schon die Klassenzahl H_l des Körpers $K(\zeta)$ der l-ten Einheitswurzel ζ durch l teilbar ist.

Es geht dies aus einem allgemeinen Satz hervor, wonach die Klassenzahl des Körpers der l^n-ten Einheitswurzeln $(n = 2, 3, \ldots)$ dann und nur dann durch l teilbar ist, wenn l irregulär ist (F. VI, S. 29). Doch soll dieser Satz für den $K(\varepsilon)$ hier nochmals abgeleitet werden. Der Beweis läßt sich einmal so führen, daß die Kummerschen Ausdrücke für die Klassenzahlen der Kreiskörper herangezogen und an den „ersten Faktoren" von H_{l^2} und H_l Teilbarkeitsuntersuchungen gemacht werden, während für die „zweiten Faktoren" Betrachtungen über die Relativnormen der „Kreiseinheiten" (s. dafür Zahlbericht, § 98) von $K(\varepsilon)$ auszuführen sind; es soll dies hier nicht näher durchgeführt werden.

Ein zweiter Beweis verläuft so:

In der Relativdiskriminante des $K(\varepsilon)$ als relativ-zyklischen Oberkörpers von $K(\zeta)$ geht nur das eine Primideal $\lambda = 1 - \zeta$ auf und deshalb ist hier nach Satz H der Einleitung die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe $a = e$.

Wird $K(\zeta)$ als regulär vorausgesetzt, so ist $e = 0$ zu setzen und daher auch $a = 0$. Setzt man nun in Satz K $\mu = \zeta$ und $k = K(\zeta)$, so stellt die Form (2), die ja sämtliche Klassen von $K(\varepsilon)$, deren Ordnungen Potenzen von l sind, enthält, für reguläres l nur die Hauptklasse von $K(\varepsilon)$ dar, und die Klassenanzahl H_{l^2} ist daher für reguläres l zu l prim.

Ein bekannter Satz über die in der Relativdiskriminante eines Kummerschen Körpers enthaltenen Primideale (Zahlbericht § 126, Satz 148) erlaubt den gleichen Beweisgang wie für $K(\varepsilon)$ für den Körper $K(\sqrt[l]{\eta}, \zeta)$ einzuschlagen, wobei η eine beliebige Einheit von $K(\zeta)$ bedeutet. Denn die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[l]{\eta}, \zeta)$ kann wieder höchstens das eine Primideal λ enthalten und sie *muß* aber auch durch λ teilbar sein, denn aus der Existenz eines relativ-zyklischen und unverzweigten Relativkörpers über $K(\zeta)$ würde (Zahlbericht § 58, Satz 94) direkt folgen, daß die Klassenzahl von $K(\zeta)$ durch l teilbar ist, welch letzteres hier aber ausgeschlossen wurde. Wir formulieren den

Satz I. *Wenn die Klassenzahl H_l des Körpers $K(\zeta)$ zu l prim ist, so bleibt auch die Klassenzahl jedes durch Adjunktion der l-ten Wurzel aus einer Einheit des $K(\zeta)$ entstehenden Körpers zu l prim.*

§ 2.

Nunmehr leiten wir vier Sätze ab, von denen die beiden ersten eine kanonische Darstellung der Einheiten bzw. der Idealklassen des $K(\zeta)$, die beiden letzten die entsprechende Darstellung für die Einheiten sowie die

Idealklassen des $K(\varepsilon)$ betreffen. In unserer Bezeichnungsweise werden die Buchstaben η, H für die Einheiten des $K(\zeta)$ bzw. des $K(\varepsilon)$ vorbehalten; die Ideale und Klassen, die in $K(\zeta)$ liegen, sind stets mit kleinen deutschen, die Ideale und Klassen in $K(\varepsilon)$ mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet. r ist eine primitive Wurzel $\bmod l^2$, d. h. $r^{l-1} \not\equiv 1, \bmod l^2$ und s ist in $K(\xi)$ die Substitution $(\zeta : \zeta^r)$, in $K(\varepsilon)$ die Substitution $(\varepsilon : \varepsilon^r)$.

Satz II. *Im Körper $K(\zeta)$ läßt sich ein Fundamentalsystem reeller Einheiten η_i angeben mit der Eigenschaft*

$$\eta_i^{s-r^{2i}} = \eta_i'^{\,l} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right), \tag{3}$$

wobei die η_i' gewisse reelle Einheiten in $K(\zeta)$ bedeuten. Zum Beweise wenden wir auf ein irgendwie gewähltes Fundamentalsystem $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}$ der reellen Einheiten die Substitution s an und drücken die Einheiten $\tilde{\eta}_i^s$ durch die ursprünglichen $\tilde{\eta}_i$ aus:

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_1^s &= \pm \eta_1^{a_{11}} \quad \tilde{\eta}_2^{a_{12}} \quad \ldots \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{a_{1,\frac{l-3}{2}}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3') \\
\tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^s &= \pm \tilde{\eta}_1^{a_{\frac{l-3}{2},1}} \tilde{\eta}_2^{a_{\frac{l-3}{2},2}} \ldots \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{a_{\frac{l-3}{2},\frac{l-3}{2}}}.
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen kann man wieder die Substitution s ausführen und die Einheiten $\tilde{\eta}_i^{s^2}$ als Produkte der $\tilde{\eta}_i^s$ und daher der $\tilde{\eta}_i$ darstellen.

Dieses Verfahren kann fortgesetzt werden; da aber $\tilde{\eta}_i^{s^{\frac{l-1}{2}}} = \eta_i$ ist, sieht man, daß für die Matrix A der ganzen Zahlen a_{ik} die Gleichung

$$A^{\frac{l-1}{2}} = E_{\frac{l-3}{2}}$$

gelten muß mit $E_{\frac{l-3}{2}}$ als Einheitsmatrix vom Grade $\frac{l-3}{2}$.

Die Nullstellen der Determinante von $A - t E_{\frac{l-3}{2}}$, d. h. der charakteristischen Gleichung von A, sind daher $\frac{l-1}{2}$-te Einheitswurzeln; wir nehmen als bereits bewiesen an, daß sämtliche $\frac{l-1}{2}$-te Einheitswurzeln mit Ausnahme der 1 unter ihnen vorkommen, so daß die charakteristische Gleichung von A

$$\frac{t^{\frac{l-1}{2}} - 1}{t - 1} = 0 \tag{4}$$

lautet. (4) hat, als Kongruenz mod l genommen, sämtliche quadratische Reste außer 1 zu Wurzeln und wir können daher eine Matrix T' mit ganzzahligen Elementen t'_{ik} angeben, deren Determinante $|T'| \equiv 1, \bmod l$ ist, derart, daß in $T'AT'^{-1}$ die Elementen der Hauptdiagonale den $\frac{l-3}{2}$ quadratischen Resten $(\neq 1)$ und die übrigen Elemente der Null mod l kongruent sind; $T'AT'^{-1}$ ist also einer Diagonalmatrix mod l kongruent. Zu jeder Matrix T', für die $|T'| \equiv 1, \bmod N$ ist, gibt es aber nach einem Satze von Minkowski (Untersuchungen über quadratische Formen, I. Teil, § 3, Acta mathematica 7) eine ihr mod N kongruente Matrix T, deren Determinante $|T| = 1$ ist; hierbei ist N ein beliebiger ganzzahliger Modul. Die Anwendung dieses Satzes für $N = l$ erlaubt, die Matrix $T = (t_{ik})$ (der Akzent werde von jetzt ab wieder fortgelassen) als unimodular anzunehmen.

Man geht nun von dem Fundamentalsystem der $\tilde{\eta}_i$ mittels der Formeln

$$\eta_1 = \tilde{\eta}_1^{t_{11}} \quad \tilde{\eta}_2^{t_{12}} \quad \dots \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{t_{1,\frac{l-3}{2}}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_{\frac{l-3}{2}} = \tilde{\eta}_1^{t_{\frac{l-3}{2},1}} \tilde{\eta}_2^{t_{\frac{l-3}{2},2}} \dots \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{t_{\frac{l-3}{2},\frac{l-3}{2}}}$$

zu neuen Einheiten η_i über, die wieder ein Fundamentalsystem bilden, da ja die Determinante der ganzzahligen t_{ik} gleich 1 ist.

Den Formeln (3′) entspricht

$$\eta_1^s = \pm \eta_1^{b_{11}} \quad \eta_2^{b_{12}} \quad \dots \eta_{\frac{l-3}{2}}^{b_{1,\frac{l-3}{2}}},$$

$$(3'') \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_{\frac{l-3}{2}}^s = \pm \eta_1^{b_{\frac{l-3}{2},1}} \eta_2^{b_{\frac{l-3}{2},2}} \dots \eta_{\frac{l-3}{2}}^{b_{\frac{l-3}{2},\frac{l-3}{2}}}$$

und für $B = (b_{ik})$ ergibt sich $B = TAT^{-1}$ und nach den eben erwähnten Eigenschaften dieser Matrix ist (bei geeigneter Numerierung) $b_{ii} \equiv r^{2i}$, $b_{ik} \equiv 0, \bmod l$; $i \neq k$. Setzt man dies in (3″) ein, so ergibt sich, daß $\eta_i^{s-r^{2i}}$ für $i = 1, 2, \dots, \frac{l-3}{2}$ die l-te Potenz einer Körpereinheit ist, d. i. aber der Satz II.

Wir haben noch den Nachweis, daß der Ausdruck (4) die charakteristische Gleichung von A ist, nachzutragen.

Ist nicht $|A - tE_{\frac{l-3}{2}}| = \frac{t^{\frac{l-1}{2}} - 1}{t-1}$, so ist die Gleichung niedrigsten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten, der A genügt,

$$G(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n = 0, \qquad n < \frac{l-3}{2}$$

von kleinerem als dem $\frac{l-3}{2}$-ten Grade.

Wir bilden dann die Ausdrücke $\tilde{\eta}_i^{G(s)} \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right)$ und ersetzen in ihnen die $\tilde{\eta}_i^{s^k}$ mittels der Formeln $(3')$ durch Produkte der $\tilde{\eta}_i$:

$$\tilde{\eta}_1^{G(s)} = \pm \tilde{\eta}_1^{n_{11}} \quad \tilde{\eta}_2^{n_{12}} \quad \ldots \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{n_{1,\frac{l-3}{2}}},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{G(s)} = \pm \tilde{\eta}_1^{n_{\frac{l-3}{2},1}} \tilde{\eta}_2^{n_{\frac{l-3}{2},2}} \ldots \tilde{\eta}_{\frac{l-3}{2}}^{n_{\frac{l-3}{2},\frac{l-3}{2}}}.$$

Für die Matrix $N = (n_{ik})$ erhalten wir hierbei:

$$N = g_0 + g_1 A + \ldots + g_n A^n = G(A) = 0,$$

d. h. N verschwindet, da $G(A)$ nach Voraussetzung $= 0$ ist.

Daher würde für die Einheiten $\tilde{\eta}_i$ (und somit für jede reelle Einheit des $K(\zeta)$)

$$\tilde{\eta}^{G(s)} = \pm 1$$

gelten. Da aber $G(x)$ ein Polynom vom Grade $n < \frac{l-3}{2}$ ist, würde man jetzt auf das Verschwinden des Regulators des $K(\zeta)$

$$\left|\log|\eta_i^{s^{k-1}}|\right| \qquad \left(i, k = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right)$$

schließen können; daher führt die Annahme, daß die charakteristische Gleichung von A von (4) verschieden ist, zu einem Widerspruch.

Ebenso wie Satz II ist abzuleiten der verallgemeinernde

Satz IIa. *Im Körper $K(\zeta)$ läßt sich für jedes ganzzahlige $\geqq 1$ ein Fundamentalsystem reeller Einheiten $\eta_{i;c}$ angeben mit der Eigenschaft*

$(3''')$ $$\eta_{i;c}^{s-r^{2il^{c-1}}} = \eta_{i;c}'^{l^c} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right).$$

Wir deuten den Beweis für $c = 2$ an. Es ist bloß nachzuweisen, daß die Matrix B der b_{ik} in $(3'')$ in eine Diagonalmatrix mod l^2 unimodular transformiert werden kann.

B kann nach dem Früheren in der Form $R + lS$ geschrieben werden, wobei R die Diagonalmatrix

$$R = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r^4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r^{l-3} \end{pmatrix}$$

bedeutet und die Elemente s_{ik} von S ganzzahlig sind. Wir stellen jetzt eine ganzzahlige Matrix $U' = E_{\frac{l-3}{2}} + lX$ auf, in der die Elemente x_{ik} von X den Kongruenzen

$$x_{ik} \equiv \frac{s_{ik}}{r^{2i} - r^{2k}}, \mod l, \quad i \neq k$$

genügen sollen, die x_{ii} dagegen beliebige Zahlen mit $\sum_{i=1}^{\frac{l-3}{2}} x_{ii} \equiv 0, \mod l$ sein mögen, so daß $|U'| \equiv 1, \mod l^2$ wird. Nach dem früher zitierten Minkowskischen Satze kann U' sogleich durch eine ihm mod l^2 kongruente unimodulare Matrix U ersetzt werden. Nun ist

$$\begin{aligned} UBU^{-1} &\equiv (E_{\frac{l-3}{2}} + lX)(R + lS)(E_{\frac{l-3}{2}} - lX) \\ &\equiv R + l(XR - RX + S), \mod l^2 \end{aligned}$$

und für das Element β_{ik} von UBU^{-1} gilt

$$\beta_{ik} \equiv l(x_{ik}(r^{2k} - r^{2i}) + s_{ik}) \equiv 0, \mod l^2; \quad i \neq k.$$

Daher ist UBU^{-1} einer Diagonalmatrix mod l^2 kongruent, woraus weiter wegen $(UBU^{-1})^{\frac{l-1}{2}} = E_{\frac{l-3}{2}}$ folgt, daß die Diagonalelemente β_{ii} in einer gewissen Reihenfolge der Zahlen $r^{2il}\left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right)$ kongruent mod l^2 sind, und wenn man eine solche Permutationsmatrix Π nimmt, daß für das Diagonalelement γ_{ii} von $\Pi UBU^{-1}\Pi^{-1}$ $\gamma_{ii} \equiv r^{2il}$, mod l^2 gilt und mittels der Formeln

$$\Pi U = V = (v_{ik}),$$

$$\eta_{i;2} = \eta_1^{v_{i,1}} \eta_2^{v_{i,2}} \ldots \eta_{\frac{l-3}{2}}^{v_{i,\frac{l-3}{2}}} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right)$$

neue Fundamentaleinheiten $\eta_{i;2}$ einführt, so genügen sie tatsächlich der Bedingung $(3''')$ für $c = 2$.

§ 3.

Satz III betrifft die Klassengruppe von $K(\zeta)$. Die Klassenzahl dieses Körpers sei $H_l = l^h q$, $q \not\equiv 0, \mod l$; da für unsere Überlegungen bloß diejenigen Elemente, deren Ordnungen Potenzen von l sind, in Betracht zu ziehen sind, befassen wir uns nur mit der Untergruppe der q-ten Potenzen der Idealklassen von $K(\zeta)$ und nennen sie die irreguläre Klassengruppe. Wir haben hier einen etwas allgemeineren Äquivalenzbegriff und nennen und schreiben zwei Ideale $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'$ äquivalent (oder zwei Idealklassen $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'$ gleich), wenn im gewöhnlichen Sinne $\mathfrak{j}^q \sim \mathfrak{j}'^q$ (bzw. $\mathfrak{j}^q = \mathfrak{j}'^q$) ist; unter

„Klasse eines Ideals $\mathfrak{j}$ innerhalb der irregulären Gruppe" können wir einfach die Klasse von $\mathfrak{j}^{qq'}$ $(qq' \equiv 1, \mod l^h)$ im gewöhnlichen Sinn verstehen. In diesem Sinne gilt:

Satz III. *In $K(\zeta)$ läßt sich für die Gruppe der q-ten Potenzen der Idealklassen eine Normalbasis*

$$\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_e, \quad \mathfrak{j}_i^{l^{h_i}} = 1, \ \mathfrak{j}_i^{l^{h_i-1}} \neq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, e) \tag{5}$$

wählen, derart, daß zugleich auch

$$\mathfrak{j}_1^{s-c_1} = 1, \ldots, \mathfrak{j}_e^{s-c_e} = 1 \tag{5'}$$

gilt, wobei die c_i gewisse ganze rationale Zahlen bedeuten.

Der Beweis verläuft ähnlich wie bei Satz II, indem von einer beliebigen Normalbasis $\tilde{\mathfrak{j}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{j}}_e$ der irregulären Klassengruppe ausgegangen und durch „Transformation" mittels einer geeigneten Matrix ganzer rationaler Zahlen zur speziellen Basis (5), (5′) unseres Satzes übergegangen wird. Wir wollen den Beweis der Kürze halber an einem speziellen Falle, in welchem bereits alles im allgemeinen Falle zu Berücksichtigende ersichtlich wird, durchführen. Es sei eine Normalbasis der irregulären Gruppe durch die vier Basiselemente $\tilde{\mathfrak{j}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{j}}_4$ gegeben, wobei die Ordnung von $\tilde{\mathfrak{j}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{j}}_2$ l^a und die von $\tilde{\mathfrak{j}}_3$ und $\tilde{\mathfrak{j}}_4$ $l^b < l^a$ sein möge; also $\tilde{\mathfrak{j}}_1^{l^a} = \tilde{\mathfrak{j}}_2^{l^a} = \tilde{\mathfrak{j}}_3^{l^b} = \tilde{\mathfrak{j}}_4^{l^b} = 1$.

Die Klassen $\tilde{\mathfrak{j}}_1^s, \ldots, \tilde{\mathfrak{j}}_4^s$ können wieder durch die Basis ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{j}}_1^s &= \tilde{\mathfrak{j}}_1^{a_{11}} \tilde{\mathfrak{j}}_2^{a_{12}} \tilde{\mathfrak{j}}_3^{a_{13}} \tilde{\mathfrak{j}}_4^{a_{14}}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{\mathfrak{j}}_4^s &= \tilde{\mathfrak{j}}_1^{a_{41}} \tilde{\mathfrak{j}}_2^{a_{42}} \tilde{\mathfrak{j}}_3^{a_{43}} \tilde{\mathfrak{j}}_4^{a_{44}}. \end{aligned} \tag{5''}$$

Die Matrix der a_{ik} sei wieder mit A bezeichnet; die wiederholte Anwendung der Operation s auf (5″) ergibt, daß A^{l-1} der Einheitsmatrix kongruent ist, wobei die Kongruenz in den beiden ersten Spalten von A^{l-1} mod l^a, in den beiden letzten Spalten mod l^b zu nehmen ist. Wir suchen wieder A durch eine geeignete Transformation modd l^a, l^b in eine Diagonalmatrix überzuführen, müssen uns aber hier auf solche Substitutionen T $(|T| \not\equiv 0, \mod l)$ beschränken, für die die vier transformierten Idealklassen

$$\mathfrak{j}_1' = \tilde{\mathfrak{j}}_1^{t_{11}} \tilde{\mathfrak{j}}_2^{t_{12}} \tilde{\mathfrak{j}}_3^{t_{13}} \tilde{\mathfrak{j}}_4^{t_{14}}, \quad \mathfrak{j}_2', \quad \mathfrak{j}_3', \quad \mathfrak{j}_4'$$

wieder Elemente einer Normalbasis der Gruppe sind.

Hierzu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Zahlen t_{31}, t_{32}, t_{41}, t_{42} durch l^{a-b} teilbar angenommen werden.

Man findet noch, indem man die Äquivalenzen für $\tilde{j}_3^s$ und $\tilde{j}_4^s$ in $(5''')$ zur l^b-ten Potenz erhebt, daß auch a_{31}, a_{32} und a_{41}, a_{42} durch l^{a-b} teilbar sind, und daher kann man schreiben

$$(5''') \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ l^{a-b}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

wobei die A_{ik} 2×2 reihige ganzzahlige Matrizen sind.

Nun ist einschiebend zu bemerken, daß für jede quadratische Matrix M mit ganzzahligen Elementen aus einer Kongruenz $M^{l-1} \equiv E_n \bmod l$ folgt, daß eine ganzzahlige Matrix T mit $|T| \not\equiv 0, \bmod l$ existiert, so daß $TMT^{-1} \bmod l$ einer Diagonalmatrix kongruent wird.

Liegt jetzt eine Kongruenz $M^{l-1} \equiv E_n, \bmod l^m, (m > 1)$ vor, so kann in ähnlicher Weise vorgegangen werden, wie beim Beweis von Satz II a, wo gezeigt wurde, daß eine Matrix $B\left(B^{l-1} = E_{\frac{l-3}{2}}\right)$, die bereits mod l einer Diagonalmatrix kongruent ist, auch mod l^2 in eine Diagonalmatrix transformiert werden kann, d. h. man kann TMT^{-1}, das bereits mod l eine Diagonalmatrix ist, in eine Diagonalmatrix mod l^m transformieren und diese Transformation ist daher auch für M selbst möglich.

Bildet man aus $(5''')$ A^{l-1} und setzt man z. B. $b \geqq a - b$ voraus[1]), so daß $A^{l-1} \equiv E_4, \bmod l^{a-b}$ ist, so ergibt sich, daß

$$A_{11}^{l-1} \equiv A_{22}^{l-1} \equiv E_2, \bmod l^{a-b}$$

sein muß, und nach dem vorigen Absatze gibt es zwei Matrizen T_{11}, T_{22} mit $|T_{11}| \not\equiv 0, |T_{22}| \not\equiv 0, \bmod l$, so daß $T_{11}A_{11}T_{11}^{-1}$ und $T_{22}A_{22}T_{22}^{-1}, \bmod l^{a-b}$ zu Diagonalmatrizen werden, und die Matrix vierten Grades $T' = \begin{pmatrix} T_{11}, & 0 \\ 0, & T_{22} \end{pmatrix}$ erscheint in unserem Sinne als „zulässig" zur Transformation der Idealklassen. Das transformierte $A' = T'AT'^{-1}$ hat die Form

$$A' \equiv \begin{pmatrix} c_1 & 0 & u_{13} & u_{14} \\ 0 & c_2 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \bmod l^{a-b}.$$

Um in A' z. B. das dritte Element der ersten Zeile in eine durch l^{a-b} teilbare Zahl zu verwandeln, ist, falls $c_1 \not\equiv c_3, \bmod l$ ist, mittels der Matrix

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1]) Der Fall $b < a - b$ ist analog zu behandeln.

zu transformieren, wobei $k \equiv \frac{u_{13}}{c_1 - c_3}$, mod l^{a-b} ist; T_3 ist eine zulässige Matrix. Ist aber $c_1 \equiv c_3$, so lehrt die Betrachtung des dritten Elementes der ersten Zeile von A'^{l-1}, das $\equiv u_{13} \cdot \frac{c_1^{l-1} - c_3^{l-1}}{c_1 - c_3}$, mod l^{a-b} ist, daß u_{13} bereits durch l^{a-b} teilbar ist. Dieses Verfahren kann fortgesetzt und so eine „zulässige" Matrix T'' gefunden werden, so daß mod $l^{a-b} A'' = T'' A' T''^{-1}$ eine Diagonalmatrix wird, also

$$A'' = R + l^{a-b} R ,$$

wobei

$$R = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

ist. A'' aber kann leicht durch wiederholte Anwendung des früher erwähnten, schon bei Satz IIa angewandten Verfahrens mittels einer zulässigen Matrix $T''' = E_4 + l^{a-b} X$ in eine Diagonalmatrix $T''' A'' T'''^{-1}$ modd l^a, l^b übergeführt werden, und durch Zusammensetzung von T', T'' und T''' erhalten wir die zulässige Transformation $T = T''' T'' T'$, mittels welcher von $\tilde{\mathfrak{j}}_1 \dots \tilde{\mathfrak{j}}_4$ auf solche Idealklassen $\mathfrak{j}_1 \dots \mathfrak{j}_4$ übergegangen werden kann, die die Bedingungen von Satz IV erfüllen. Wird die Gleichung $\mathfrak{j}_2^{s-c_i} = 1$ mit dem symbolischen Exponenten $\frac{s^{l-1} - c_i^{l-1}}{s - c_i}$ potenziert, so ergibt sich $\mathfrak{j}_i^{s-c_i \, l-1} = 1$ und daraus $c_i^{l-1} \equiv 1$, mod l^{h_i}; daher muß c_i ein $l^{h_i - 1}$-ter Potenzrest mod l^{h_i} sein.

Im Körper $K(\varepsilon)$ werde die Substitution s^{l-1} mit S bezeichnet; es ist also $S = (\varepsilon : \varepsilon^{r^{l-1}}) = (\varepsilon : \varepsilon\zeta)$; S ist die schon früher eingeführte erzeugende Substitution der Relativgruppe von $K(\varepsilon)$ in bezug auf $K(\zeta)$. Es gilt nun

Satz IV. *Im Körper $K(\varepsilon)$ läßt sich ein System von $\frac{l^2 - l}{2} - 1$ unabhängigen reellen Einheiten*

$$(6) \qquad H_0, H_0^S, \dots, H_0^{S^{l-2}}, \dots, H_{\frac{l-3}{2}}, H_{\frac{l-3}{2}}^S, \dots, H_{\frac{l-3}{2}}^{S^{l-2}}, \eta_1, \dots, \eta_{\frac{l-3}{2}}$$

angeben derart, daß die f-te Potenz jeder reellen Einheit H des $K(\varepsilon)$ in der Form

$$(6') \qquad H^f = H_0^{F_0(S)} \dots H_{\frac{l-3}{2}}^{F_{\frac{l-3}{2}}(S)} \eta_1^{x_1} \dots \eta_{\frac{l-3}{2}}^{x_{\frac{l-3}{2}}}$$

geschrieben werden kann, wobei für die Einheiten H_i, η_i

$$(6'') \quad H_0^{sS-1} = 1; \quad H_i^{sS-r^{2il}} = H'^{l^2}, \quad \eta_i^{s-r^{2il}} = \eta'^{l^2} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}\right)$$

gilt, f *eine bestimmte zu* l *prime ganze Zahl und die* $F_i(S)$ *ganzrational-zahlige Polynome in* S *bedeuten.*

Zum Beweise wird davon ausgegangen, daß die Einheiten des als relativ-zyklischer Oberkörper von $K(\zeta)$ aufgefaßten $K(\varepsilon)$ durch $\frac{l-1}{2}$ relative Grundeinheiten $\tilde{H}_0, \ldots, \tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}$ samt ihren relativ konjugierten und durch die Einheiten des $K(\zeta)$ dargestellt werden können (D. Hilbert, „Zahlbericht", S. 272 u. 273); es können dann wieder $\tilde{H}_0^{sSf_0}, \ldots, \tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}^{sSf_0}$ in der Form

$$\tilde{H}_0^{sSf_0} = \pm \tilde{H}_0^{F_0(S)} \ldots \tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}^{F_{0,\frac{l-3}{2}}(S)} \eta_0''$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}^{sSf_0} = \pm \tilde{H}_0^{F_{\frac{l-3}{2},0}(S)} \ldots \tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}^{F_{\frac{l-3}{2},\frac{l-3}{2}}(S)} \eta_{\frac{l-3}{2}}''$$

geschrieben werden; hierbei bedeutet f_0 eine gewisse zu l prime ganze Zahl; durch wiederholte Anwendung der Substitution sS und unter Beachtung der Beziehung $\tilde{H}^{(sS)^{\frac{l-1}{2}}} = \tilde{H}$ erkennt man, daß für die Matrix $F = \{F_{ik}(\zeta)\}$ die Gleichung

$$F^{\frac{l-1}{2}} = f_0^{\frac{l-1}{2}} \cdot E_{\frac{l-1}{2}}$$

gilt. Die Elemente der Matrix $F_1(\zeta) = \frac{1}{f_0} F(\zeta)$, $F_1^{\frac{l-1}{2}} = E_{\frac{l-1}{2}}$, sind ganze oder gebrochene Zahlen aus $K(\zeta)$ mit zu l primen Nennern. Die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung sind $\frac{l-1}{2}$-te Einheitswurzeln und die charakteristische Gleichung von F_1 muß

$$t^{\frac{l-1}{2}} - 1 = 0$$

lauten; denn würde F_1 einer Gleichung niedrigeren als $\frac{l-1}{2}$-ten Grades in $K(\zeta)$ und daher auch im natürlichen Rationalitätsbereich genügen, so müßte, ähnlich wie früher, auf das Verschwinden des Regulators von $K(\varepsilon)$ geschlossen werden.

Die Matrix F_1 kann mod λ kongruent gemacht werden einer Matrix Φ_1 mit ganzen rationalen Zahlen als Elementen. Aus $F_1 \equiv \Phi_1$, mod λ und

$F_1^{\frac{l-1}{2}} = E_{\frac{l-1}{2}}$ folgt $\Phi_1^{\frac{l-1}{2}} \equiv E_{\frac{l-1}{2}}$, mod l und es gibt daher, wie bereits früher benützt, eine Matrix ganzer rationaler Zahlen T_1, $|T_1| \not\equiv 0$, mod l, so daß $T_1 \Phi_1 T_1^{-1}$ mod l und daher $F_1' = T_1 F_1 T_1^{-1}$ mod λ einer Diagonalmatrix kongruent wird. Die $\frac{l-1}{2}$ Diagonalelemente von F_1' sind den einzelnen Wurzeln der Kongruenz $t^{\frac{l-1}{2}} \equiv 1$, mod λ, d. h. den $\frac{l-1}{2}$ quadratischen Resten (inkl. 1) kongruent. Durch Transformation von F_1' mittels einer geeigneten Permutationsmatrix Π kann noch erreicht werden, daß in $F_1'' = \Pi F_1' \Pi^{-1}$ die Diagonalelemente der Reihe nach $1, r^2, r^4, \ldots$ (mod λ) lauten. Wir setzen $F_1'' = M + \lambda N$, wobei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & r^4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r^{l-3} \end{pmatrix}$$

und wo die Elemente n_{ik} von N zu l prime Nenner haben. Es wird die Matrix $T_2 = E_{\frac{l-1}{2}} + \lambda X$ gebildet und für die Elemente x_{ik} von X festgesetzt:

$$x_{ik} \equiv \frac{n_{ik}}{r^{2i} - r^{2k}}, \text{ mod } \lambda; \qquad i \neq k; \ (x_{ii} \text{ beliebig}).$$

Wir berechnen nun $F_1''' = T_2 F_1'' T_2^{-1}$ mod λ^2.

$$F_1''' = T_2 F_1'' T_2^{-1} \equiv (E_{\frac{l-1}{2}} + \lambda X)(M + \lambda N)(E_{\frac{l-1}{2}} - \lambda X)$$

$$\equiv M + \lambda (XM - MX + N), \text{ mod } \lambda^2.$$

Das i, k-te Element $(i \neq k)$ von F_1''' ist kongruent

$$\lambda (x_{ik} r^{2k} - x_{ik} r^{2i} + n_{ik}) \equiv 0, \text{ mod } \lambda^2$$

und daher F_1''' mod λ^2 einer Diagonalmatrix kongruent. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man für jede Potenz λ^k eine ganzzahlige Matrix $T^{(k)}$ $(|T^{(k)}| \not\equiv 0$, mod $\lambda)$, so daß in $T^{(k)} F_1 T^{(k)-1}$ die Zähler aller Elemente außerhalb der Hauptdiagonale durch λ^k teilbar sind; daß jedoch die sämtlichen Elemente in $T^{(k)} F_1 T^{(k)-1}$ ganze Zahlen in $K(\zeta)$ sind, ist hiermit nicht gezeigt und für unsere Zwecke auch nicht erforderlich. Insbesondere ist für $k = 2l - 2$ $F_2 = T^{(2l-2)} F_1 T^{(2l-2)-1}$ eine Matrix, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonale durch l^2 teilbar sind, während

die Elemente der Hauptdiagonale wegen $F_2^{\frac{l-1}{2}} = E_{\frac{l-1}{2}}$ den Zahlen r^{2i}; $i = 0, 1, \ldots, \frac{l-3}{2}$, mod l kongruent sind.

Bildet man nun mittels der Elemente $t_{ik}(S)$ von $T^{(2l-2)}(S)$ neue Einheiten H_i durch die Formeln

$$H_0 = \tilde{H}_0^{t_{0,0}(S)} \quad \ldots \tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}^{t_{0,\frac{l-3}{2}}(S)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_{\frac{l-3}{2}} = \tilde{H}_0^{t_{\frac{l-3}{2},0}(S)} \quad \ldots \tilde{H}_{\frac{l-3}{2}}^{t_{\frac{l-3}{2},\frac{l-3}{2}}(S)},$$

so genügen die Einheiten H_i erstens den Gleichungen (6″), wie ersichtlich ist, und zweitens bilden wegen $|T^{(2l-2)}(\zeta)| \not\equiv 0$, mod λ die Einheiten H_i $\left(i = 0, 1, \ldots, \frac{l-3}{2}\right)$ ebenso wie die $\tilde{H}_i$ ein System relativer Grundeinheiten, so daß durch (6) tatsächlich ein System unabhängiger Einheiten in $K(\varepsilon)$ (jedoch im allgemeinen kein „Fundamentalsystem“) mit der Eigenschaft (6″) gegeben wird, womit der Satz IV bewiesen ist.

Wenn die Relativnorm $N'(H_{i_0}) = H_{i_0}^{1+S+\ldots+S^{l-1}}$ der i_0-ten relativen Grundeinheit H_{i_0} ($H_{i_0}^{sS-r^{2i_0}l} = H_{i_0}'^{l^2}$) nicht $= \pm 1$ ist (worauf auch der Fall $H_{i_0}^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = \eta'^{l}$ durch die Transformation $H_{i_0} = \frac{H_{i_0}}{\eta'}$ zurückzuführen ist), so kann für η_{i_0} ($\eta_{i_0}^{s-r^{2i_0}l} = \eta'^{l^2}$) die Relativnorm $N'(H_{i_0})$ genommen werden; doch kann nicht geschlossen werden, daß sämtliche η_i von Satz II oder IIa Relativnormen von Einheiten H_i sind; der Fall, daß für eine der relativen Grundeinheiten $N'(H_{i_0}) = 1$ ist, ist nur dann ausgeschlossen, wenn der zweite Faktor der Klassenzahl von $K(\zeta)$ zu l prim ist [2]).

---

[2]) Das kann so gezeigt werden: Aus $H_{i_0}^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = 1$ würde folgen (s. Zahlbericht, § 54, Satz 90), daß

$$H_{i_0} = M^{1-S} \tag{6a}$$

gesetzt werden kann, wobei M eine ganze Zahl in $K(\varepsilon)$ ist. Außerdem ist nach (6′) $H_{i_0}^{sS-r^{2i_0}} = H'^{l}$ und wenn man hier die Relativnorm nimmt, folgt $H'^{l(1+S+\ldots+S^{l-1})} = 1$ und $H'^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = 1$ und man kann unter Benutzung von (6a) schreiben:

$$M^{(1-S)(sS-r^{2i_0})} = H'^{l-1-S\ldots S^{l-1}} = H'^{(1-S)\left(\binom{l}{2}-\ldots\right)} = H''^{1-S}, \quad \left(\frac{M^{sS-r^{2i_0}}}{H''}\right)^{1-S} = 1,$$

$$\frac{M^{sS-r^{2i_0}}}{H''} = \beta \qquad (\beta \text{ in } K(\zeta)). \tag{6b}$$

(Fortsetzung der Fußnote 2 auf nächster Seite.)

Auf die Ideale und Klassen von $K(\varepsilon)$ übertragen wir in entsprechender Weise das in der Einleitung zu Satz III für $K(\zeta)$ Gesagte; dem Satze III entspricht der folgende

Satz V. *Das System der Q-ten Potenzen der Idealklassen von $K(\varepsilon)$, d. i. die irreguläre Klassengruppe von $K(\varepsilon)$, ist in der Form*

$$\mathfrak{J}_1^{F_1(S)} \cdots \mathfrak{J}_e^{F_e(S)} \mathfrak{j} \tag{7}$$

darstellbar, wobei für die Klassen $\mathfrak{J}_i$

$$\mathfrak{J}_i^{(1-S)p_i} = \mathfrak{j}_i', \quad \mathfrak{J}_i^{(1-S)p_i-1} \neq \mathfrak{j}, \tag{7'}$$

und

$$\mathfrak{J}_i^{sS-c_i} = 1 \tag{7''}$$

gilt, und die p_i und c_i gewisse ganze rationale Zahlen und e die Anzahl

---

Aus (6a) folgt für das Hauptideal (M)

$$(M) = (M)^S$$

und die Zerlegung von (M) in Primideale des $K(\varepsilon)$ zeigt, daß

$$(M) = \mathfrak{j}\mathfrak{L}^n, \qquad n < l, \tag{6c}$$

sein muß, wo $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus $H(\zeta)$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^S = (1-\varepsilon)$, $\mathfrak{L}^l = (\lambda)$, das einzige ambige Primideal von $K(\varepsilon)$ ist.

Aus (6c) und (6b) folgt, daß das Ideal $(\mathfrak{j}\mathfrak{L}^n)^{sS-r^{2i_0}} = \mathfrak{j}^{s-r^{2i_0}}\mathfrak{L}^{n(1-r^{2i_0})}$ ein Ideal aus $K(\zeta)$ wird, und das ist nur möglich für $n = 0$. (6c) modifiziert sich also zu $(M) = \mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}$ ist in $K(\zeta)$ sicher kein Hauptideal; denn wäre $\mathfrak{j} = (\gamma)$, so könnte gesetzt werden $M = \gamma H'''$ mit einer Einheit H''' und, dies in (6a) eingesetzt, würde auf $H_{i_0} = H'''^{1-S}$ führen; letztere Beziehung aber ist unvereinbar damit, daß H_{i_0} relative Grundeinheit ist (Zahlbericht, § 55). Aus $(M) = \mathfrak{j}$ folgt $(M^{1+S+\cdots+S^{l-1}}) = \mathfrak{j}^l$, d. h. $\mathfrak{j}^l$ ist in $K(\zeta)$ ein Hauptideal. Aus (6b) folgt noch

$$\mathfrak{j}^{s-r^{2i_0}} \sim 1 \text{ in } K(\zeta)$$

und wenn wir diese Äquivalenz mit $\dfrac{s^{\frac{l-1}{2}} - (r^{2i_0})^{\frac{l-1}{2}}}{s - r^{2i_0}}$ potenzieren

$$\mathfrak{j}^{s^{\frac{l-1}{2}} - r^{i_0(l-1)}} \sim \mathfrak{j}^{s^{\frac{l-1}{2}}-1} \sim 1, \qquad \mathfrak{j}^{s^{\frac{l-1}{2}}+1} \sim \mathfrak{j}^2,$$

so werden wir auf ein Ideal $\mathfrak{j}^{s^{\frac{l-1}{2}}+1}$ geführt, das in $K(\zeta)$ dem Ideal der Ordnung l^2 äquivalent ist; das Ideal $\mathfrak{j}^{s^{\frac{l-1}{2}}+1}$ liegt aber in $K(\zeta+\zeta^{-1})$ und ist in diesem Körper umso mehr von einer durch l teilbaren Ordnung. Daher folgt schließlich aus der Grundannahme $N'(H_{i_0}) = 1$, daß die Klassenzahl von $K(\zeta+\zeta^{-1})$, d. i. der zweite Faktor der Klassenzahl von $K(\zeta)$, durch l teilbar ist, und nur, wenn der zweite Faktor zu l prim ist, zerfallen sämtliche Einheiten von $K(\zeta)$ in $K(\varepsilon)$.

der Elemente einer Normalbasis der Klassengruppe von $K(\zeta)$ sind; $\mathfrak{j}$ bedeutet das System derjenigen Klassen, die Ideale aus $K(\zeta)$ enthalten. Die Darstellung einer Klasse in der Form (7) ist eindeutig, wenn die Zahlen $F_i(\zeta)$ bloß $\bmod (1-\zeta)^{p_i}$ bestimmt sind.

Beweis. Zunächst ist, wie schon im § 1 erwähnt, nach Satz J der Einleitung für den $K(\varepsilon)$ $a = e$ zu setzen und Satz K der Einleitung ergibt dann, daß eine eindeutige Darstellung (7), (7′) mittels Klassen $\tilde{\mathfrak{J}}_i$ immer existiert. Man kann daher wieder die Klassen $\tilde{\mathfrak{J}}^{sS}$ in der Form

$$\tilde{\mathfrak{J}}_i^{sS} = \tilde{\mathfrak{J}}_1^{\varphi_{i,1}^{(S)}} \dots \tilde{\mathfrak{J}}_e^{\varphi_{i,e}^{(S)}} \mathfrak{j}$$

ausdrücken und für die Matrix $\Phi(\zeta) = \{\varphi_{ik}(\zeta)\}$ wird gefunden

$$\Phi^{l-1} \equiv E_e,$$

wobei die Kongruenz in der i-ten Kolonne $\bmod (1-\zeta)^{p_i}$ zu nehmen ist. Man kann weiter analog vorgehen, wie beim Beweise von Satz III, wo die Matrix A im natürlichen Rationalitätsbereich $\bmod l^a, l^b \dots$ in eine Diagonalmatrix transformiert wurde; es läßt sich zeigen, daß die Matrix Φ mittels einer geeigneten „zulässigen“ Transformation T, deren Elemente ganze Zahlen aus $K(\zeta)$ sind, in eine Diagonalmatrix $\bmod (1-\zeta)^{p_1}, (1-\zeta)^{p_2}, \dots$ transformiert werden kann. Zulässig ist hierbei jede Transformation, die geeignet ist, die „Basis“klassen $\tilde{\mathfrak{J}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{J}}_e$ wiederum in „Basis“klassen überzuführen. Mittels T gelangt man zunächst zu einer Basis $\mathfrak{J}_1', \dots, \mathfrak{J}_e'$ mit $\mathfrak{J}_i'^{sS-c_i'} = \mathfrak{j}_i'$. Nun erlaubt die Eigenschaft (5′) der Basis (5) von Satz III, jedes Ideal $\mathfrak{j}$ aus $K(\zeta)$, für beliebiges c_i', in der Form

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}''^{s-c_i'} \mathfrak{j}'''$$

zu schreiben, wobei $\mathfrak{j}'''^{s-c_i''} = 1$ und $c_i'' \equiv c_i', \bmod l$ ist. Setzen wir also $\mathfrak{J}_i'^{sS-c_i'} = \mathfrak{j}_i''^{s-c_i'} \mathfrak{j}_i'''$ und $\frac{\mathfrak{J}_i'}{\mathfrak{j}_i''} = \mathfrak{J}_i$, so folgt

$$\mathfrak{J}_i^{sS-c_i'} = \mathfrak{j}_i''', \qquad \mathfrak{J}_i^{(sS)^{l-1}-c_i'^{l-1}} = \mathfrak{j}_i'''^{\frac{s^{l-1}-c_i'^{l-1}}{s-c_i'}} = \mathfrak{j}_i'''^{\frac{c_i''^{l-1}-c_i'^{l-1}}{c_i''-c_i'}},$$

$$\left(\frac{c_i''^{l-1}-c_i'^{l-1}}{c_i''-c_i'} \not\equiv 0, \bmod l\right)$$

$$\mathfrak{j}''' = \mathfrak{J}_i^{(1-c_i'^{l-1}) \cdot \frac{c_i''-c_i'}{c_i''^{l-1}-c_i'^{l-1}}}$$

und wenn wir $c_i \equiv c_i' + (c_i'^{l-1}-1)\frac{c_i''-c_i'}{c_i''^{l-1}-c_i'^{l-1}} \bmod$ einer hinlänglich großen l-Potenz setzen, so haben wir die Basis $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_e$ von Satz V, für die $\mathfrak{J}_i^{sS-c_i} = 1$ gilt.

§ 4.

Nunmehr gehen wir näher auf die nach (5), (5) dargestellte irreguläre Klassengruppe von $K(\zeta)$ und auf ihren Zusammenhang mit den singulären Primärzahlen dieses Körpers ein. Für die Ideale eine Klasse $\mathfrak{j}_i$ verwenden wir dieselbe Bezeichnung wie für diese Klasse und bezeichnen, wenn $\mathfrak{j}_i$ ein festes Ideal dieser Klasse bedeutet, eine dem Hauptideal $\mathfrak{j}_i^{l^{h_i}}$ assoziierte Zahl mit $\tilde{\varrho}_i$.

Wegen (5′) muß dann

$$\tilde{\varrho}_i^{s-c_i} = \eta \tilde{\alpha}_i^{l^{h_i}} \tag{8}$$

sein, worin $\tilde{\alpha}_i$ eine gebrochene Zahl aus $K(\zeta)$ ist.

Durch Potenzierung dieser Beziehung mit $\frac{s^{l-1}-c_i^{l-1}}{s-c_i}$ hat man

$$\tilde{\varrho}_i^{1-c_i^{l-1}} = \eta^{\frac{s^{l-1}-c_i^{l-1}}{s-c_i}} \tilde{\alpha}_i^{\frac{s^{l-1}-c_i^{l-1}}{s-c_i} l^{h_i}}$$

und da nach der Bemerkung zu Satz III $c_i^{l-1} \equiv 1$, mod l^{h_i} ist, muß $\eta^{\frac{s^{l-1}-c_i^{l-1}}{s-c_i}} = \eta'^{l^{h_i}}$ sein und daher die Einheit η sich in der Form

$$\eta = \eta_1^{s-c_i} \eta_2^{l^{h_i}} \tag{8′}$$

darstellen lassen. Der Beweis für Formel (8′) ergibt sich so: Man setzt

$$\eta = \eta_{1;h_i}^{x_1} \eta_{2;h_i}^{x_2} \cdots \eta_{\frac{l-3}{2};h_i}^{x_{\frac{l-3}{2}}} \tag{8″}$$

wo die $\eta_{k;h_i}$ ($\eta_{k;h_i}^{s-r^{2k}l^{h_i-1}} = \eta_k'^{l^{h_i}}$) die in Satz IIa erwähnten Basiseinheiten sind, und folgert zunächst für alle k, für welche $r^{2k l^{h_i-1}} \not\equiv c_i$, mod l ist, aus

$$\eta_{k;h_i}^{s-r^{2k}l^{h_i-1}} = \eta_k'^{l^{h_i}}, \qquad \eta_{k;h_i}^{c_i-r^{2k}l^{h_i-1}} = \eta_{k;h_i}^{-(s-c_i)} \eta_k'^{l^{h_i}},$$

daß $\eta_{k,h_i}^{x_k}$ in der Form (8′) angesetzt werden kann.

Falls c_i quadratischer Rest mod l ist, so gibt es ein k_0, so daß $r^{2k_0 l^{h_i-1}} \equiv c_i$, mod l^{h_i} ist; dann folgt aber aus der Potenzierung der Gleichung (8″) mit $\frac{s^{l-1}-c_i^{l-1}}{s-c_i}$, daß auch $\eta_{k_0;h_i}^{x_{k_0} \cdot \frac{s^{l-1}-c_i^{l-1}}{s-c_i}} = \eta''^{l^{h_i}}$ ist und dies zusammen mit $\eta_{k_0;h_i}^{s-c_i} = \eta_k''^{l^{h_i}}$ zeigt, daß $x_{k_0} \equiv 0$, mod l^{h_i} sein muß, so daß

auch $\eta_{k_0;h_i}^{x_{k_0}}$ in der Form (8′) angesetzt werden kann; daraus ergibt sich daß η tatsächlich in der Form (8′) geschrieben werden kann.

Nunmehr kann in (8) die Zahl $\tilde{\varrho}_i$ durch $\varrho_i = \frac{\tilde{\varrho}_i}{\eta_1}$ ersetzt werden, so daß gilt:

$$(8''') \qquad \varrho_i^{s-c_i} = \alpha_i^{l^{h_i}}, \quad (\varrho_i) = \mathfrak{j}_i^{l^{h_i}}.$$

In der durch die Basis (5) dargestellten irregulären Klassengruppe von $K(\zeta)$ können e Untergruppen vom Index l hervorgehoben werden; die i-te dieser Untergruppen $\mathfrak{G}_i'$ durchläuft alle Klassen $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{j}_e^{x_e}$, für welche $x_i \equiv 0$, mod l ist. Es gibt nun in der vollen Klassengruppe von $K(\zeta)$ eine einzige Untergruppe $\mathfrak{G}_i$ vom Index l, die $\mathfrak{G}_i'$ enthält und zu $\mathfrak{G}_i$ nach Satz B der Einleitung eine zugehörige singuläre Primärzahl ω_i, so daß in leichtverständlicher Symbolik $\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{G}_i}\right) = 1$, $\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{j}_i^n \mathfrak{G}_i}\right) \neq 1$, $n \not\equiv 0$, mod l ist; d. h. daß

$$(9) \qquad \left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{j}_i}\right) = \zeta_i \neq 1, \qquad \left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{j}_k}\right) = 1, \qquad i \neq k,$$

ist.

Die singulären Primärzahlen ω_i sind (vgl. Def. 3 der Einleitung) Produkte der Zahlen ϱ_i in (8‴) mit Einheiten η und l-ten Potenzen von Zahlen aus $K(\zeta)$; im Hinblick auf (9) soll ω_i die der Klasse $\mathfrak{j}_i$ zugehörige singuläre Primärzahl genannt werden.

Auf die Gleichungen (9) wenden wir die Substitution $s = (\zeta : \zeta^r)$ an:

$$(9') \qquad \left(\frac{\omega_i^s}{\mathfrak{j}_i^s}\right) = \zeta_i^r, \qquad \left(\frac{\omega_i^s}{\mathfrak{j}_k^s}\right) = 1.$$

Nun sind die ω_i^s zugleich mit den ω_i singuläre Primärzahlen, und da nach Satz C der Einleitung $\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{j}}\right)$ für zwei äquivalente Ideale gleichen Wert besitzt, dürfen wir in (9′) $\mathfrak{j}_i^s$ durch das ihm äquivalente $\mathfrak{j}_i^{c_i}$ ersetzen. Es wird

$$(9'') \qquad \left(\frac{\omega_i^s}{\mathfrak{j}_i^{c_i}}\right) = \zeta_i^r, \qquad \left(\frac{\omega_i^s}{\mathfrak{j}_i}\right) = \zeta_i^{\frac{r}{c_i}},$$

$\left(\text{wobei } \frac{r}{c_i} \text{ den zugehörigen Rest mod } l \text{ bedeutet}\right)$, und da nach (9) auch $\left(\frac{\omega_i^{\frac{r}{c_i}}}{\mathfrak{j}_i}\right) = \zeta_i^{\frac{r}{c_i}}$ ist, hat man

$$\left(\frac{\omega_i^{s-\frac{r}{c_i}}}{\mathfrak{j}_i}\right) = 1$$

und desgleichen $\left(\frac{\omega_i^{s-\frac{r}{c_i}}}{\mathfrak{j}_k}\right) = 1$, $k \neq i$.

Die Zahl $\omega_i^{s-\frac{r}{c_i}}$ ist also in bezug auf die Ideale sämtlicher irregulären Klassen von (5) l-ter Potenzrest, während in bezug auf die Ideale, deren Ordnungen zu l prim sind, jede singuläre Primärzahl und damit auch $\omega_i^{s-\frac{r}{c_i}}$ eo ipso l-ter Potenzrest ist.

$\omega_i^{s-\frac{r}{c_i}}$ muß daher die l-te Potenz einer Zahl aus $K(\zeta)$ sein. Wir setzen ω_i als Produkt der Zahlen ϱ_i und einer Einheit an und schreiben

$9'''$) $$\omega_i = \varrho_1^{x_1} \dots \varrho_e^{x_e} \eta \beta^l.$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit $s - \frac{r}{c_i}$ potenzieren und die erste Gleichung ($8'''$) berücksichtigen, finden wir

$$\varrho_1^{x_1(c_1-\frac{r}{c_i})} \dots \varrho_e^{x_e(c_e-\frac{r}{c_i})} \eta^{s-\frac{r}{c_i}} = \gamma^l.$$

Geht man aber mittels der zweiten Gleichung ($8'''$) von den ϱ_k zu der entsprechenden Beziehung zwischen den Idealen $\mathfrak{j}_k$ über, so ergibt sich sogleich, daß

$$x_1\left(c_1 - \frac{r}{c_i}\right) \equiv x_2\left(c_2 - \frac{r}{c_i}\right) \equiv \dots \equiv x_e\left(c_e - \frac{r}{c_i}\right) \equiv 0, \bmod l$$

sein muß und daraus weiter, daß $\eta^{s-\frac{r}{c_i}} = \eta'^l$ ist.

Für alle Indizes m, für die $m \not\equiv \frac{r}{c_i}$, mod l ist, muß also $x_m \equiv 0$, mod l sein und ω_i ist daher bis auf eine l-te Potenz das Produkt derjenigen ϱ aus ($8'''$) deren zugehörige c kongruent $\frac{r}{c_i}$ mod l sind, und, falls $\frac{r}{c_i}$ quadratischer Rest ist, einer Potenz der Einheit $\eta_{\frac{1}{2}\operatorname{ind}\frac{r}{c_i}}$ aus (3).

Es sei nun a irgendein quadratischer Rest mod l und es möge in (5) genau z_a Idealklassen $\mathfrak{j}_k$ geben, deren zugehörige $c_k \equiv a$, mod l sind. Die diesen z_a Klassen (zufolge Satz B und ($9'''$)) zugehörigen z_a singulären Primärzahlen sind multiplikativ unabhängig voneinander und sind nach dem vorigen Absatz bis auf eine l-te Potenz Produkte solcher ϱ_k, deren $c_k \equiv \frac{r}{a}$ sind; da $\frac{r}{a}$ quadratischer Nichtrest ist, tritt hier keine Einheit η hinzu; denn für das η in ($9'''$) folgt aus $\eta^{s-\frac{r}{a}} = \eta'^l$ leicht $\eta = \eta''^l$. Es müssen daher auch mindestens z_a derartige ϱ vorhanden sein und nach ($8'''$) auch mindestens z_a Basisklassen $\mathfrak{j}$ in (5), deren $c \equiv \frac{r}{a}$ ist. Wir wollen die genaue Anzahl dieser Basisklassen mit $z_{\frac{r}{a}} \geqq z_a$ bezeichnen; zu ihnen ge-

hören wiederum $z_{\frac{r}{a}}$ singuläre Primarzahlen ω, die Potenzprodukte solcher ϱ, für deren c $c \equiv \frac{r}{\frac{r}{a}} = a$ gilt, sowie gegebenenfalls der Einheit $\eta_{\frac{1}{2}\operatorname{ind} a}$ aus (3) sind; die genaue Anzahl der letzteren ϱ ist aber z_a und daher gilt

$$z_{\frac{r}{a}} \geqq z_a \geqq z_{\frac{r}{a}} - 1.$$

Es sollen von jetzt die Ideale derjenigen Klassen j_i in (5), (5'), deren c_i quadratische Nichtreste b sind, mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, (\mathfrak{p}_i^{s-b_i} \sim 1)$ bezeichnet werden; die Ideale der übrigen Klassen aber, deren c_i quadratische Reste a sind, mit $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, (\mathfrak{q}_i^{s-a_i} \sim 1)$ und wir können nach dem Vorhergehenden den Satz aussprechen:

Satz VI. *Wenn unter den Basiselementen der irregulären Klassengruppe von $K(\zeta)$ für einen bestimmten quadratischen Nichtrest b_0 genau z_{b_0} Klassen $\mathfrak{p}_{m_1}, \mathfrak{p}_{m_2}, \ldots, (\mathfrak{p}_{m_i}^{s-l_{m_i}} = 1)$ vorhanden sind, so daß $b_{m_i} \equiv b_0$, mod l ist, so gibt es entweder z_{b_0} oder $z_{b_0} - 1$ Basisklassen $\mathfrak{q}_{n_1}, \mathfrak{q}_{n_2}, \ldots, (\mathfrak{q}_{n_i}^{s-a_i} = 1)$, deren zugehörige a_{n_i} kongruent $\frac{r}{b_0}$ mod l sind; insbesondere ist, wenn der zweite Fall eintritt, die Einheit $\eta_{\frac{1}{2}\operatorname{ind}\frac{r}{b_0}}$ aus (3) singuläre Primärzahl.*

Für die Klassen $\mathfrak{p}$ folgt aus $\mathfrak{p}_i^{s-b_i} = 1$ und $b_i^{\frac{l-1}{2}} \equiv -1$, mod l^{h_l}

$$\mathfrak{p}_i^{s^{\frac{l-1}{2}} - b_i^{\frac{l-1}{2}}} = \mathfrak{p}_i^{s^{\frac{l-1}{2}} + 1} = 1$$

in $K(\zeta)$ und (in dem in der Einleitung zu Satz III angegebenen Sinne) im reellen Unterkörper $\frac{l-1}{2}$-ten Grades $K(\zeta + \zeta^{-1})$, während aus

$$\mathfrak{q}_i^{s-a_i} = 1$$

$\mathfrak{q}_i^{s^{\frac{l-1}{2}} - 1} = 1$, $\mathfrak{q}_i^{s^{\frac{l-1}{2}} + 1} = \mathfrak{q}_i^2$ in $K(\zeta)$ und in $K(\zeta + \zeta^{-1})$ folgt.

Die Relativnormen der $\mathfrak{p}$-Klassen in bezug auf $K(\zeta + \zeta^{-1})$ gehen also in die Hauptklasse über, während die Relativnormen der $\mathfrak{q}$-Klassen in $K(\zeta)$ selbst $\mathfrak{q}$-Klassen äquivalent sind und in $K(\zeta + \zeta^{-1})$ das System der irregulären Klassen dieses Körpers vorstellen.

In diesem Sinne sind die $\mathfrak{q}$-Klassen als reelle Klassen zu bezeichnen und die $\mathfrak{p}$-Klassen als komplexe Klassen anzusprechen, da ja keine $\mathfrak{p}$-Klasse reelle Ideale enthält. Da nun der zweite Faktor der Klassenzahl von $K(\zeta)$ zugleich die Klassenzahl von $K(\zeta + \zeta^{-1})$ ist (Zahlbericht, Seite 377, § 117), so ist die Ordnung der Gruppe der $\mathfrak{q}$-Klassen (d. h. der durch die $\mathfrak{q}$-Klassen

erzeugten Gruppe) der höchsten im zweiten Faktor der Klassenzahl enthaltenen l-Potenz gleich und daher die Ordnung der $\mathfrak{p}$-Klassen-Gruppen gleich der höchsten l-Potenz im ersten Faktor.

§ 5.

Ebenso wie bei der irregulären Klassengruppe von $K(\zeta)$ wollen wir in der durch (7), (7″) dargestellten Klassengruppe von $K(\varepsilon)$ die Klassen (und Ideale) $\mathfrak{J}$, deren c quadratische Nichtreste mod l sind, als $\mathfrak{P}$-Basisklassen, sowie die Klassen der durch sie erzeugten Gruppe als $\mathfrak{P}$-Gruppe von den übrigen Klassen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ unterscheiden. Analog der Eigenschaften der $\mathfrak{q}$- und $\mathfrak{p}$-Klassen sind die $\mathfrak{Q}$-Klassen der irregulären Klassengruppe des reellen Körpers $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ äquivalent, während die Relativnormen der $\mathfrak{P}$-Klassen in bezug auf $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ in die Hauptklasse fallen. Da der zweite Faktor der Klassenzahl von $K(\varepsilon)$ gleich der Klassenzahl von $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ ist (vgl. z. B. Weber, Lehrbuch d. Algebra 2, S. 784 ff.), so ist die Ordnung der $\mathfrak{P}$- bzw. der $\mathfrak{Q}$-Gruppe gleich der höchsten im ersten, bzw im zweiten Faktor der Klassenzahl enthaltenen Potenz von l.

Die Relativnormen der $\mathfrak{P}$-, bzw. der $\mathfrak{Q}$-Klassen fallen offenbar in die Gruppe der $\mathfrak{p}$-, bzw. in die der $\mathfrak{q}$-Klassen. Würde es nun unter den e „Basis"elementen $\mathfrak{J}$ in (7) z. B. weniger $\mathfrak{Q}$-Klassen geben, als es unter den Basisklassen $\mathfrak{j}$ in (5) $\mathfrak{q}$-Klassen gibt, so würde mindestens eine $\mathfrak{q}$-Basisklasse nicht als Relativnorm von $\mathfrak{Q}$-Klassen, daher überhaupt nicht als Relativnorm einer Idealklasse von $K(\varepsilon)$ darstellbar sein. Dies aber würde, da $K(\varepsilon)$ nicht relativ unverzweigt bezüglich $K(\zeta)$ ist, gegen Satz F der Einleitung verstoßen. Eine analoge Überlegung zeigt, daß es in (7) auch nicht weniger $\mathfrak{P}$-Klassen geben kann als die Zahl der $\mathfrak{p}$-Basisklassen von (5) beträgt, und daher gibt es in (5) und (7) gleichviel reelle wie komplexe Basisklassen. Fehlen insbesondere die $\mathfrak{q}$-Klassen in $K(\zeta)$, so können daher auch in $K(\varepsilon)$ keine $\mathfrak{Q}$-Klassen auftreten, und so ergibt sich

Satz Ia. *Wenn die Klassenzahl des $K(\zeta + \zeta^{-1})$ zu l prim ist, so ist auch die Klassenzahl des $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ zu l prim.*

Für die $\mathfrak{p}$-Klassen gilt folgender Satz:

Satz VII. *Ein Ideal der $\mathfrak{p}$-Gruppe, das in $K(\zeta)$ nicht in die Hauptklasse fällt, kann auch in $K(\varepsilon)$ nicht in der Hauptklasse liegen.*

Beweis: Für jedes Ideal der $\mathfrak{p}$-Gruppe gilt $\mathfrak{p}_0^{s\frac{l-1}{2}+1} \sim 1$ und wir setzen $\mathfrak{p}_0^{s\frac{l-1}{2}+1} = (\alpha)$ mit einer Zahl α aus $K(\zeta)$.

Wäre nun $\mathfrak{p}_0$ in $K(\varepsilon)$ mit einer Zahl M assoziiert, $(M) = \mathfrak{p}_0$, so würde folgen

$$(M^{1+(sS)^{\frac{l-1}{2}}}) = \mathfrak{p}_0^{1+s^{\frac{l-1}{2}}} = (\alpha),$$

d. h. in $K(\varepsilon)$ wäre $M^{1+(sS)^{\frac{l-1}{2}}} = \alpha H_1$, wobei H_1 eine Einheit bezeichnet; weiter wäre $M^{S-1} = H_2 \varepsilon_2$ mit einer reellen Einheit H_2 und einer l^2-ten Einheitswurzel ε_2. Es wäre dann

$$(10)\quad [H_2\varepsilon_2]^{1+(sS)^{\frac{l-1}{2}}} = [M^{S-1}]^{1+(sS)^{\frac{l-1}{2}}} = [M^{1+(sS)^{\frac{l-1}{2}}}]^{S-1} = [\alpha H_1]^{S-1} = H_1^{S-1},$$

d. h. $H_2^2 = H_1^{S-1}$.

Setzt man das mit $H_2\varepsilon_2 = M^{S-1}$ zusammen, so folgt $\left[\frac{M^2}{H_1}\right]^{S-1} = \varepsilon_2$; dies zeigt, daß ε_2 eine l-te Einheitswurzel $\zeta' = \varepsilon'^{S-1}$ ist, und wir erhalten $\left[\frac{M^2}{H_1\varepsilon'}\right]^{S-1} = 1$, oder

$$M^2 = H_1 \varepsilon' \beta,$$

wobei β eine Zahl aus $K(\zeta)$ bedeutet; die letzte Gleichung aber würde sagen, daß M^2 mit einer Zahl aus $K(\zeta)$ assoziiert ist, d. h. daß $\mathfrak{p}_0^2 = (M^2)$ schon in $K(\zeta)$ in der Hauptklasse läge, und dies widerspricht unserer Voraussetzung $\mathfrak{p}_0 \not\sim 1$ in $K(\zeta)$. Daher kann $\mathfrak{p}_0$ auch in $K(\varepsilon)$ nicht ~ 1 werden.

Für die q-Klassen gilt kein dem Satz VII entsprechender Satz, doch kann gezeigt werden, daß für jede quadratische Restklasse $a \pmod l$ höchstens eine einzige der q-Klassen von der Eigenschaft $q^{s-a} = 1$, $q^l = 1$, $q \neq 1$, (wobei „=“ die Äquivalenz in $K(\zeta)$ bedeutet), im $K(\zeta)$ in die Hauptklasse übergehen kann; und falls dies für eine q-Klasse wirklich zutrifft, kann die Einheit $\eta_{\frac{1}{2}\operatorname{ind} a}$ von (3) nicht Relativnorm einer Einheit aus $K(\varepsilon)$ sein.

§ 6.

Um nunmehr eine Bedingung dafür, daß in der $\mathfrak{p}$-Gruppe tatsächlich Ideale von höherer als der l-ten Ordnung auftreten, ableiten zu können, ziehen wir die Äquivalenz

$$(11)\qquad \mathfrak{j}^{q_0 + q_1 s^{-1} + \ldots + q_{l-2} s^{-(l-2)}} \sim 1$$

heran, die (s. Zahlbericht § 109, S. 360) für ein jedes Ideal aus $K(\zeta)$ gilt; in (11) ist $q_k = \frac{r r_k - r_{k+1}}{l}$ $(k = 0, 1, \ldots, l-2)$ und r_k bedeutet den kleinsten positiven Rest mod l von r^k. Für ein Ideal einer $\mathfrak{p}$-Basisklasse der Ordnung l^{h_l} aus (5) gilt

$$(11')\qquad \mathfrak{p}_i^{s-b_i} \sim 1$$

und es kann nach früherem $b_i \equiv r^{-T l^{h_i-1}}$, mod l^{h_i} gesetzt werden mit einer ungeraden Zahl $T \leqq l-2$.

Mit (11′) kombinieren wir (11) für $\mathfrak{j} = \mathfrak{p}_i$ und finden

$$\mathfrak{p}_i^{q_0+q_1 b_i^{-1}+\ldots+q_{l-2} b_i^{-(l-2)}} \sim 1$$

und daher

$$(12) \qquad \sum_{k=0}^{l-2} q_k b_i^{-k} \equiv \sum_k q_k r^{k T l^{h_i-1}} \equiv 0, \quad \text{mod } l^{h_i}.$$

Um die Summe (12) zu bestimmen, erheben wir — in Verallgemeinerung einer auf S. 432 des Zahlberichtes gegebenen Betrachtung — die Gleichung $r_{k+1} = r r_k - l q_k$ zur $(l^{h_i-1} T+1)$-ten Potenz:

$$r_{k+1}^{l^{h_i-1}T+1} = (r r_k)^{l^{h_i-1}T+1} - (l^{h_i-1} T+1)\, l q_k (r r_k)^{l^{h_i-1}T} + \ldots,$$

$$r_{k+1}^{l^{h_i-1}T+1} \equiv r^{l^{h_i-1}T+1} r_k^{l^{h_i-1}T+1} - l(l^{h_i} T+1) r^{l^{h_i-1}T} q_k r_k^{l^{h_i-1}T}, \quad \text{mod } l^{h_i+1}$$

und erhalten daraus durch Summierung über $k = 0, 1, \ldots, l-2$

$$(13) \qquad \sum_{k=0}^{l-2} q_k r^{k T l^{h_i-1}} \equiv \frac{r^{l^{h_i-1}T+1}-1}{r^{l^{h_i-1}T}(l^{h_i-1}T+1)} \cdot \frac{1}{l} \sum_{x=1}^{l-1} x^{l^{h_i-1}T+1}, \quad \text{mod } l^{h_i}.$$

Es ist nun die Formel für die Summe der $2n$-ten Potenzen der ganzen Zahlen von 1 bis $l-1$ heranzuziehen (vgl. z. B. P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie 2, S. 22):

$$\sum_{x=1}^{l-1} x^{2n} = \sum_{x=1}^{l} x^{2n} - l^{2n} = \frac{l^{2n+1}}{2n+1} - \frac{l^{2n}}{2} + \frac{B_1}{2n+1}\binom{2n+1}{2} l^{2n-1}$$
$$- \frac{B_2}{2n+1}\binom{2n+1}{4} l^{2n-3} + \ldots - \ldots + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} l^3$$
$$- (-1)^n \frac{B_n}{2n+1}\binom{2n+1}{2n} l.$$

Da die Nenner der Bernoullischen Zahlen B_k bekanntlich nie durch das Quadrat einer Zahl teilbar sind, ist in der letzten Summe für $2n = l^{h_i-1} T+1$ offenbar jedes Glied außer dem letzten durch l^{h_i+1} teilbar und aus (13) folgt:

$$(13') \qquad \sum_{k=0}^{l-2} q_k r^{k T l^{h_i-1}} \equiv \frac{r^{l^{h_i-1}T+1}-1}{r^{l^{h_i-1}T}(l^{h_i-1}T+1)} \cdot (-1)^{\frac{lT+3}{2}} B_{\frac{l^{h_i-1}T+1}{2}}, \quad \text{mod } l^{h_i}.$$

Soll nun (12) erfüllt sein, so muß auch

$$(14) \qquad B_{\frac{l^{h_i-1}T+1}{2}} \equiv 0, \quad \text{mod } l^{h_i}$$

sein und somit ist bewiesen:

Satz VIII. *Notwendig dafür, daß es in der Klassengruppe des $K(\zeta)$ ein komplexes Ideal $\mathfrak{p}$ l^{h_i}-ter Ordnung gibt, ist, daß der Zähler einer der $\frac{l-3}{2}$ Bernoullischen Zahlen*

$$B_{\frac{l^{h_i-1}T+1}{2}}, \qquad T = l-4, l-6, \ldots$$

durch l^{h_i} teilbar ist.

Umgekehrt ist aber das Bestehen einer Kongruenz (14) nicht hinreichend für die Existenz eines Ideals l^{h_i}-ter Ordnung, sondern hat nur Bedeutung für die Gesamtordnung der $\mathfrak{p}$-Gruppe und zwar gilt der

Satz IX. *Wenn für jedes ungerade $T < l-2$, für das $B_{\frac{T+1}{2}} \equiv 0$, mod l ist, $h^{(T)}$ die größte ganze Zahl bedeutet, derart, daß*

$$B_{\frac{l^{h^{(T)}-1}T+1}{2}} \equiv 0, \mod l^{h^{(T)}}$$

ist, so ist die Ordnung der $\mathfrak{p}$-Gruppe gleich $l^{\sum_T h^{(T)}}$.

Der Beweis ergibt sich aus der Betrachtung des ersten Faktors A_l der Klassenzahl von $K(\zeta)$; A_l läßt sich (Zahlbericht, S. 430) schreiben:

$$(15) \qquad A_l = \frac{g(Z)\, g(Z^3)\, g(Z^5) \ldots g(Z^T) \ldots g(Z^{l-2})}{(-1)^{\frac{l-1}{2}} 2^{\frac{l-3}{2}} \cdot \frac{r^{\frac{l-1}{2}}+1}{l}},$$

wo unter Z eine primitive $(l-1)$-te Einheitswurzel und unter $g(Z)$ die Summe $\sum_{k=0}^{l-2} q_k Z^k$ verstanden ist; untersucht man nun die Teilbarkeit eines Faktors $g(Z^T)$ von (15) durch eine Potenz des Ideals $\mathfrak{L} = (l, r-Z)$, eines Primteilers von l in $K(Z)$, so gelangt man wieder zu einer Summe der Form (12) und zu einer Kongruenz (14) als notwendiger und hinreichender Bedingung dafür, daß $g(Z^T)$ durch $\mathfrak{L}^{h_i}$ teilbar ist; daraus folgt unser Satz, der die Verallgemeinerung des bekannten Kriteriums von den $\frac{l-3}{2}$ ersten Bernoullischen Zahlen vorstellt und der sich in anderer Einkleidung bei H. C. Vandiver („On the first factor of the class number of a cyclotomic field", Bull. Am. Math. Soc. 1918, S. 458) findet.

§ 7.

Hier schließen wir eine Untersuchung über die Teilbarkeit des ersten Faktors A_{l^n} der Klassenzahl von $K(\varepsilon)$ durch l an. Die bei Hilbert (Zahlbericht, S. 376, § 117) angegebene Darstellung ergibt nach einer einfachen Umformung:

$$(16) \qquad A_{l^2} = \frac{G(\bar{Z})\, G(\bar{Z}^2)\, G(\bar{Z}^5) \dots g(\bar{Z}^{l^2-l-1})}{(-1)^{\frac{l-1}{2}} 2^{\frac{l^2-l}{2}-1} \cdot \frac{r^{\frac{l^2-l}{2}}+1}{l^2}}$$

mit $G(\bar{Z}) = \sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k \bar{Z}^k$ und einer primitiven (l^2-l)-ten Einheitswurzel $\bar{Z}$; Q_k ist für $\frac{r R_k - R_{k+1}}{l^2}$ gesetzt und R_k bedeutet den kleinsten positiven Rest mod l^2 von r^k. Für die primitive (l^2-l)-te Einheitswurzel kann $\bar{Z} = Z\zeta$ gesetzt werden und wir fassen die Faktoren im Zähler von (16) folgendermaßen zusammen:

$$(16') \qquad G(Z)\, G(Z\zeta) \dots G(Z\zeta^{l-1}) \dots G(Z^{l-2}) \dots G(Z^{l-2}\zeta^{l-1}).$$

Weiter ergibt eine kurze Rechnung

$$(17) \qquad G(Z^T) = g(Z^T).$$

Für jeden Faktor $g(Z^T)$ im Zähler von (15), der durch $\mathfrak{L} = (l, -Z+r)$ teilbar ist, enthält daher $G(Z^T\zeta)$ das Ideal $\mathfrak{L}'$

$$\mathfrak{L}' = (\mathfrak{L}, 1-\zeta), \qquad \mathfrak{L}'^{l-1} = \mathfrak{L}$$

mindestens zur ersten Potenz und aus (16'), (17) ist abzulesen, daß $\frac{A_{l^2}}{A_l}$ mindestens durch l^{n_l} teilbar ist, wenn genau n_l Faktoren von (15) durch $\mathfrak{L}$ (d. h. n_l unter den ersten $\frac{l-3}{2}$ Bernoullischen Zahlen durch l) teilbar sind.

Wir suchen ein Kriterium dafür, daß diese Mindestpotenz überschritten wird. Notwendig und hinreichend hierfür ist offenbar, daß einer derjenigen Faktoren $G(Z^T\zeta)$, für die $g(Z^T) \equiv 0 \mod \mathfrak{L}$ ist, das Ideal $\mathfrak{L}'$ mindestens zur zweiten Potenz enthält, also

$$(18) \qquad G(Z^T\zeta) \equiv 0, \mod \mathfrak{L}'^2.$$

Die Entwicklung nach Potenzen von $(1-\zeta)$ ergibt

$$G(Z^T\zeta) = \sum_k Q_k (Z^T\zeta)^k = \sum_k Q_k Z^{kT} - (1-\zeta) \sum_k k Q_k Z^{kT} + (1-\zeta)^2 \Phi(Z,\zeta).$$

Soll (18) erfüllt sein, so muß also

$$(18') \qquad \sum_{k=0}^{l^2-l-1} k Q_k Z^{kT} \equiv 0, \mod \mathfrak{L}$$

sein. Um diesen Ausdruck mod $\mathfrak{L}$ zu bestimmen, erheben wir die Identität $r = Z + (r-Z)$ zur kT-ten Potenz

$$r^{kT} = Z^{kT} + kT(r-Z)Z^{kT-1} + \dots,$$

$$r^{kT} \equiv Z^{kT} + T\frac{r-Z}{Z}kZ^{kT}, \mod \mathfrak{L}^2,$$

$$\sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k r^{kT} \equiv \sum_k Q_k Z^{kT} + T\frac{r-Z}{Z}\sum_k k Q_k Z^{kT}, \mod \mathfrak{L}^2.$$

Daraus erhält man mit Hilfe der Kongruenz $r^l \equiv Z, \mod \mathfrak{L}^2$ und mit (17)

$$(19) \qquad T(1-r^{l-1})\sum_{k=0}^{l^2-l-1} k Q_k Z^{kT} \equiv \sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k r^{kT} - \sum_{k=0}^{l-2} q_k Z^{kT} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k r^{kT} - \sum_{k=0}^{l-2} q_k r^{lTk}, \mod \mathfrak{L}^2.$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite von (19) ist bereits durch (13) bestimmt zu

$$\sum_{k=0}^{l-2} q_k r^{lTk} \equiv -\frac{r^{lT+1}-1}{2r^{lT}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{lT+1}{2}} B_{\frac{lT+1}{2}}}{\frac{lT+1}{2}}, \mod l^2.$$

Ähnlich wird

$$(13') \qquad \sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k r^{kT} \equiv -\frac{r^{T+1}-1}{2r^T} \cdot \frac{(-1)^{\frac{T+1}{2}} B_{\frac{T+1}{2}}}{\frac{T+1}{2}}, \mod l^2.$$

Es werde zur Abkürzung gesetzt

$$B'_n = \frac{(-1)^n B_n}{n}$$

und an die Kummerschen Kongruenzen für die Bernoullischen Zahlen

$$(13'') \qquad \begin{aligned} &B'_{n+\frac{l-1}{2}} - B'_n \equiv 0, \quad B'_{n+x\cdot\frac{l-1}{2}} \equiv B'_n, \mod l, \\ &B'_{n+l-1} - 2B'_{n+\frac{l-1}{2}} + B'_n \equiv 0, \quad B'_{n+x\cdot\frac{l-1}{2}} \equiv xB'_{n+\frac{l-1}{2}} - (x-1)B'_n, \mod \end{aligned}$$

erinnert (vgl. z. B.: P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, II, S. 41).

Wir erhalten schließlich aus (19)

$$\sum_{k=0}^{l^2-l-1} k Q_k r^{kT} \equiv \frac{1}{1-r^{l-1}} \cdot \frac{r^{T+1}-1}{2Tr^T}\left(B'_{\frac{T+1}{2}+\frac{l-1}{2}} - B'_{\frac{T+1}{2}}\right), \mod l.$$

Sollen daher (18) und (18′) erfüllt sein, so muß die Kongruenz

$$(20) \qquad \frac{B_{\frac{T+1}{2}+\frac{l-1}{2}}}{\frac{T+l}{2}} \equiv (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{B_{\frac{T+1}{2}}}{\frac{T+1}{2}}, \mod l^2$$

bestehen. Wir sprechen den Satz aus:

Satz X. *Wenn genau n_l unter den $\frac{l-3}{2}$ ersten Bernoullischen Zahlen durch l teilbar sind, ist $\frac{A_{l^2}}{A_l}$ mindestens durch l^{n_l} teilbar; notwendig und hinreichend dafür, daß $\frac{A_{l^2}}{A_l}$ durch l^{n_l+1} teilbar ist, ist das Bestehen der Kongruenzen*

$$\frac{B_{\frac{T+1}{2}+\frac{l-1}{2}}}{\frac{T+l}{2}} \equiv \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} B_{\frac{T+1}{2}}}{\frac{T+1}{2}}, \quad \mod l^2, \tag{21}$$

und

$$B_{\frac{T+1}{2}} \equiv 0, \quad \mod l,$$

für ein $T < l-2$.

Für ein festgehaltenes T sind diejenigen $\mathfrak{p}$-Basisideale in (5), deren $c \equiv r^{-T}$, mod l sind sind, die Relativnormen der ihnen anzahlsgleichen $\mathfrak{P}$-Basisklassen in (7) mit $c \equiv r^{-T}$; für ein derartiges $\mathfrak{P}$-Ideal ist also z. B.

$$\mathfrak{P}^{sS-r^{-l^\nu T}} \sim 1,$$

und $\mathfrak{P}$ genügt außerdem, sowie jedes Ideal aus $K(\varepsilon)$, der Äquivalenz

$$\mathfrak{P}^{Q_0+Q_1 s^{-1}+\ldots+Q_{l^2-l-1} s^{-(l^2-l-1)}} \sim 1, \tag{22}$$

die das Analogon zu (11) ist.

Aus beiden Äquivalenzen folgt

$$\mathfrak{P}^{\sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k (r^{l^\nu T} S)^k} \sim 1,$$

und aus der Betrachtung der Zahl $\sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k (r^{l^\nu T}\zeta)^k$ geht hervor:

Satz Xa. *Das Bestehen der Kongruenzen (21) für ein bestimmtes T ist eine notwendige Bedingung dafür, daß es mindestens eine $\mathfrak{P}$-Klasse ($\mathfrak{P}^{sS-r^{-l^\nu T}} = 1$) gibt, derart, daß die Klasse $\mathfrak{P}^{1-S}$ keine Ideale aus $K(\zeta)$ enthält.*

§ 8.

Nunmehr gehen wir näher ein auf die Verhältnisse, die im einfachsten Falle eines irregulären l vorliegen, d. i. wenn die Klassenzahl von $K(\zeta)$ bloß durch die erste Potenz von l teilbar ist.

Die einzige irreguläre Basisklasse von $K(\zeta)$ muß dann gemäß Satz VI eine $\mathfrak{p}$-Klasse sein; die entsprechende durch l teilbare Bernoullische Zahl sei B_ν, $\nu < \frac{l-1}{2}$. Für $\mathfrak{p}$ gilt dann

$$\mathfrak{p}^l \sim 1, \qquad \mathfrak{p}^{s-r^{l-2\nu}} \sim 1.$$

Die zu $\mathfrak{p}$ in $K(\zeta)$ zugehörige singuläre Primärzahl ist die Einheit η_ν, $\eta_\nu^{s-r^{2\nu}} = \eta_\nu'^{l}$; wir wollen unter Berufung auf Satz IIa η_ν so gewählt denken, daß auch $\eta_\nu^{s-r^{2l\nu}} = \eta''^{l^2}$ wird; η_ν ist, als reelle Zahl, einer l-ten Potenz auch mod $l(1-\zeta)^2$ kongruent, d. h. η_ν ist hyperprimär (s. Def. 2 der Einleitung). Die das Hauptideal $\mathfrak{p}^l$ darstellende Zahl ϱ, für die nach $(8''')$ $\varrho^{s-r^{l-2\nu}} = \alpha^l$ ist, ist sicher nicht primär, denn im gegenteiligen Falle wäre sie singuläre Primzahl zugleich mit η_ν, während in der Klassengruppe nur ein Basiselement enthalten ist. Ferner ist, weil die $\mathfrak{p}$-Gruppe von der Ordnung l ist, nach Satz IX

$$B_{\nu\, l-\frac{l-1}{2}} \not\equiv 0, \mod l^2. \tag{23}$$

Wir machen nun noch die Voraussetzung, daß für den Index ν die erste Kongruenz (21) nicht erfüllt sei, und bemerken vorgreifend, daß diese Voraussetzung für die drei ersten irregulären Primzahlen zutrifft.

Dann ist mit Rücksicht auf Satz X der erste Faktor und daher nach Satz Ia die ganze Klassenzahl von $K(\varepsilon)$ genau durch $l^{1+1} = l^2$ teilbar. Für die $\mathfrak{P}$-Klasse in $K(\varepsilon)$, deren Relativnorm $\mathfrak{p}$ ist, gilt infolge von Satz Xa

$$\mathfrak{P}^{S-1} \sim \mathfrak{p}^n.$$

Weiter folgt aus

$$\mathfrak{P}^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = \mathfrak{P}^{(S-1)^{l-1}+l(S-1)^{l-2}+\ldots+l} = \mathfrak{p},$$

daß

$$\mathfrak{P}^l \sim \mathfrak{p}$$

ist, wobei (z. B. nach Satz VII) in $K(\varepsilon)$ nicht $\mathfrak{p} \sim 1$ sein kann; die Klassengruppe ist hier also zyklisch und wird durch die Potenzen von $\mathfrak{P}$ dargestellt.

Wir fragen jetzt, welcher Potenz von $\mathfrak{P}$ die irreguläre Klasse l^2-ter Ordnung $\mathfrak{P}^s$, $s = (\varepsilon : \varepsilon^r)$, äquivalent ist und setzen

$$\mathfrak{P}^s \sim \mathfrak{P}^{r^{-x}}. \tag{24}$$

Wir setzen x, das mod $(l^2 - l)$ zu bestimmen ist, in der Form

$$x = x' + (l-1)y, \quad x' < l-1, \quad y < l$$

an. Wird auf beiden Seiten der Äquivalenz (24) die Relativnorm bezüglich $K(\zeta)$ genommen, so hat man in $K(\zeta)$

$$\mathfrak{p}^s \sim \mathfrak{p}^{r^{-x}} \sim \mathfrak{p}^{r^{-x'-(l-1)y}} \sim \mathfrak{p}^{r^{-x'}};$$

da nach dem früheren aber $\mathfrak{p}^{s-r^{l-2\nu}} \sim 1$ gilt, ergibt sich $x' = 2\nu - 1$; also ist x von der Form

$$x \equiv 2\nu - 1 + (l-1)y, \mod (l^2 - l).$$

Zu (24) ziehen wir die Äquivalenz (22) heran und erhalten aus beiden

$$\mathfrak{P}^{\sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k r^{kx}} \sim 1,$$

daher

$$\sum_{k=0}^{l^2-l-1} Q_k r^{kx} \equiv 0, \mod l^2.$$

Diese Summe ist nach (13′) mod l^2 proportional $\dfrac{(-1)^{\frac{x+1}{2}} B_{\frac{x+1}{2}}}{\frac{x+1}{2}} = B'_{\frac{x+1}{2}}$.

Daher ist

25) $$B'_{\frac{x+1}{2}} = B'_{\nu+\frac{l-1}{2}y} \equiv 0, \mod l^2.$$

Andererseits ist nach den Kongruenzen (13″)

$$B'_{\nu+\frac{l-1}{2}y} \equiv y B'_{\nu+\frac{l-1}{2}} - (y-1) B'_\nu, \mod l^2$$

und, da unserer Voraussetzung nach $B'_{\nu+\frac{l-1}{2}} \not\equiv B'_\nu$, mod l^2 ist, ist y durch die Kongruenz

25′) $$y \cdot \frac{B'_{\nu+\frac{l-1}{2}}}{l} \equiv (y-1)\frac{B'_\nu}{l}, \mod l$$

bestimmt.

Unter unsere Betrachtung fallen die drei niedrigsten irregulären Primzahlen, $l = 37, 59, 67$, für die, wie Kummer („Einige Sätze über die aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten komplexen Zahlen . . .“ Abh. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1856) gezeigt hat, die Klassenzahl von $K(\zeta)$ nur durch l teilbar ist.

Für $l = 37$ ist $\nu_{37} = 16$ und

$$B'_{16} \equiv 35 \cdot 37, \quad B'_{34} \equiv 30 \cdot 37, \quad B_{34} \not\equiv B'_{16}, \mod 37^2$$

und aus $30y \equiv 35(y-1)$, mod 37 hat man $y_{37} = 7$; es ist also

$$B'_{16+7\cdot 18} = B'_{142} \equiv 0, \mod 37^2.$$

Für $l = 59$ ist

$$\nu_{59} = 22, \quad B'_{22} \equiv 20 \cdot 59, \quad B'_{51} \equiv 13 \cdot 59, \quad B'_{51} \not\equiv B'_{22}, \mod 59^2.$$

$$y_{59} = 15 \quad \text{und} \quad B'_{457} \equiv 0, \mod 59^2.$$

Für $l = 67$ ist

$$\nu_{67} = 29, \quad B'_{29} \equiv 48 \cdot 67, \quad B'_{62} \equiv 24 \cdot 67, \quad B'_{62} \not\equiv B'_{29}, \mod 67^2.$$

$$y_{67} = 2 \quad \text{und} \quad B'_{95} \equiv 0, \mod 67^2.$$

Da die irreguläre Gruppe von $K(\varepsilon)$ zyklisch von der Ordnung l^2 ist, hat der zugehörige Teilklassenkörper $\overline{\overline{K}}$ nach F. II, § 11 den Relativgrad l^2

über $K(\varepsilon)$ und kann durch Adjunktion der l^2-ten Wurzel aus einer Zahl Ω von $K(\varepsilon)$ erzeugt werden. Der Körper $\overline{\overline{K}} = K(\sqrt[l^2]{\Omega}, \varepsilon)$ ist relativ unverzweigt über $\overline{K} = K(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon)$, so daß $\sqrt[l]{\Omega}$ singuläre Primzahl in $\overline{K}$ ist; ebenso ist Ω singuläre Primärzahl in $K(\varepsilon)$. Die irreguläre Klassengruppe von $\overline{K}$ umfaßt nach den Sätzen G und H der Einleitung hier nur solche Klassen, die Ideale aus $K(\varepsilon)$ enthalten. Nun geht nach F. II, § 8 immer mindestens eine Idealklasse l-ter Ordnung des Grundkörpers im relativ-zyklischen Oberkörper l-ten Relativgrades in die Hauptklasse über; in unserem Falle müssen daher die Ideale der einzigen in $K(\varepsilon)$ l-te Ordnung besitzenden Klasse $\mathfrak{P}^l$ in $\overline{K}$ in die Hauptklasse übergehen und die irreguläre Gruppe von K ist $\mathfrak{P}^x$, $x = 1, 2, \ldots, l-1$.

Im folgenden wird dem Potenzrestsymbol ( ) ein Index angefügt, um anzuzeigen, in welchen Körper es genommen wird. Nach den Eigenschaften singulärer Primärzahlen (Satz B der Einleitung) ist

$$\left(\frac{\Omega}{\overline{\mathfrak{R}}}\right)_{K(\varepsilon)} = 1, \qquad \left(\frac{\Omega}{\overline{\mathfrak{P}}}\right)_{K(\varepsilon)} \neq 1, \tag{26}$$

wobei $\mathfrak{R}$ ein Primideal aus $K(\varepsilon)$ von einer zu l primen Ordnung ist, das die Relativnorm eines Primideals $\overline{\mathfrak{R}}$ aus $\overline{K}$ wird; $\mathfrak{R} = N^{\overline{K}}_{K(\varepsilon)}(\overline{\mathfrak{R}})$. Da offenbar auch $\overline{\mathfrak{R}}$ in $\overline{K}$ eine zu l prime Ordnung hat, wird

$$\left(\frac{\sqrt[l]{\Omega}}{\overline{\mathfrak{R}}}\right)_{\overline{K}} = 1, \qquad \left(\frac{\sqrt[l]{\Omega}}{\overline{\mathfrak{P}}}\right)_{\overline{K}} \neq 1. \tag{26'}$$

Aus der ersten Beziehung (26′) folgt

$$\sqrt[l]{\Omega} \equiv F^l(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon), \text{ mod } \overline{\mathfrak{R}} \qquad \text{und} \qquad \Omega \equiv F^{l^2}(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon), \text{ mod } \overline{\mathfrak{R}}.$$

Nun sind die absoluten Normen von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ einander gleich und daher jede Zahl $F(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon)$ aus $\overline{K}$ eine Zahl $\varphi(\varepsilon)$ aus $K(\varepsilon)$ mod $\overline{\mathfrak{R}}$ kongruent, so daß folgt

$$\Omega \equiv \varphi^{l^2}, \text{ mod } \overline{\mathfrak{R}} \qquad \text{und} \qquad \text{mod } \mathfrak{R}.$$

Ω ist also l^2-ter Potenzrest von allen Primidealen aus $K(\varepsilon)$, deren Ordnung zu l prim ist, hingegen nach den zweiten Relationen (26) und (26′) l^2-ter und l-ter Nichtrest von allen Primidealen der irregulären Gruppe von $K(\varepsilon)$. Wenn nun das Symbol $\{\ \}$ der l^2-ten Potenzreste und -nichtreste für die Zahlen A und die (zu l primen) Primideale $\mathfrak{J}_p$ von $K(\varepsilon)$ durch die Definition

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{J}_p}\right\} \equiv A^{\frac{N(\mathfrak{J}_p)-1}{l^2}}, \text{ mod } \mathfrak{J}_p, \qquad \left\{\frac{A}{\mathfrak{J}_p}\right\}^{l^2} = 1$$

ngeführt wird (man beachte, daß immer $N(\mathfrak{J}_p) \equiv 1, \mod l^2$ ist), so ann insbesondere gesetzt werden

$$\left\{\frac{\Omega}{\mathfrak{P}}\right\} = \varepsilon_1, \quad \left\{\frac{\Omega}{\mathfrak{R}}\right\} = 1,$$

orin ε_1 eine primitive l^2-te Einheitswurzel ist. Durch Anwendung der ıbstitution s hat man, ähnlich wie früher in (9′), (9″),

$$\left\{\frac{\Omega^s}{\mathfrak{P}^s}\right\} = \varepsilon_1^r, \quad \left\{\frac{\Omega^s}{\mathfrak{P}^{r-x}}\right\} = \varepsilon_1^r, \quad \left\{\frac{\Omega^s}{\mathfrak{P}}\right\} = \varepsilon_1^{r^{1+x}};$$

auch

$\left\{\frac{\Omega^{r^{1+x}}}{\mathfrak{P}}\right\} = \varepsilon_1^{r^{1+x}}$ ist, wird $\left\{\frac{\Omega^{s-r^{1+x}}}{\mathfrak{P}}\right\} = 1$ und desgleichen $\left\{\frac{\Omega^{s-r^{1+x}}}{\mathfrak{R}}\right\} = 1.$

$^{s-r^{1+x}}$ ist also l^2-ter Potenzrest von allen zu l primen Primidealen von (ε) und daher selbst l^2-te Potenz einer Zahl A von $K(\varepsilon)$:

7) $$\Omega^{s-r^{1+x}} = \Omega^{s-r^{(l-1)y+2\nu}} = A^{l^2}.$$

er Bedingung (27) kann in $K(\varepsilon)$ nur eine Einheit, und zwar, wie ırch Satz IV klar ist, höchstens eine symbolische Potenz der Einheit $H_\nu^{s^{S-r^{2l\nu}}} = H_\nu'^{l^2}$, genügen, deren Relativnorm $H_\nu^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = \eta_\nu$ zu tzen ist. Es ergibt sich nach einfacher Rechnung, daß

8) $$\Omega = \eta_\nu H_\nu^{(1-S)^{l-2}(r^{(l-1)(y-2\nu)}-1)}$$

.

Da $\sqrt[l]{\Omega}$ in $\overline{K}$ singuläre Primärzahl ist, muß $\sqrt[l]{\Omega} \equiv \Phi^l(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon), \mod l\lambda$ n, mit Φ als ganzer Zahl aus $\overline{K} = K(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon) = K(\sqrt[l]{\eta_\nu}, \varepsilon)$ [nach (28)] d daher $\Omega \equiv \Phi^{l^2}(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon) \mod l^2\lambda$.

Wie früher bemerkt, ist η_ν hyperprimär (Definition 2 der Einleitung) $K(\zeta)$ und $K(\varepsilon)$, so daß das Primideal $(1-\varepsilon)$ in $\overline{K} = K(\sqrt[l]{\eta_\nu}, \varepsilon)$ in l rschiedene Primideale zerfällt, $(1-\varepsilon) = \overline{\mathfrak{Q}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{Q}}_l$ (s. F. I, § 13); da die ›rm von $(1-\varepsilon)$ in $K(\varepsilon)$ der Norm von $\overline{\mathfrak{Q}}_1$ in $\overline{K}$ gleich ist, wird jede hl $\Phi(\sqrt[l]{\Omega}, \varepsilon)$ aus $\overline{K}$ nach jeder beliebigen Potenz von $\overline{\mathfrak{Q}}_1$ einer bestimmten hl A_1 aus $K(\varepsilon)$ kongruent; wir finden demnach $\Omega \equiv A_1^{l^2}, \mod \overline{\mathfrak{Q}}_1^{l(2l-1)}$ d daher

$$\Omega \equiv A_1^{l^2}, \mod l^2\lambda.$$

Damit ist bewiesen:

Satz XI. *Wenn die Klassenzahl des Körpers $K(\zeta)$ genau durch die te Potenz von l teilbar ist und für die zugehörige Bernoullische Zahl B_ν*

1′) $$B'_{\nu+\frac{l-1}{2}} \not\equiv B'_\nu, \mod l^2$$

ist, ist die Untergruppe der irregulären Klassen von $K(\varepsilon)$ zyklisch von der Ordnung l^2; für ein Ideal $\mathfrak{P}$ einer Basisklasse dieser Gruppe gilt

$$\mathfrak{P}^{s-r^{1-2\nu-(l-1)y}} \sim 1 \tag{29}$$

und der Zähler des Ausdruckes $\dfrac{B_{\nu+y\cdot\frac{l-1}{2}}}{\nu+y\cdot\frac{l-1}{2}}$ *ist durch l^2 teilbar. Im Körper $K(\varepsilon)$ gibt es eine Einheit, die einer l^2-ten Potenz* mod $l^2\lambda$ *kongruent ist, ohne selbst l-te Potenz einer Einheit zu sein.*

Dieser Satz gestattet nun, die Voraussetzung zu deuten, die Kummer machen mußte, um im Falle, daß die Klassenanzahl von $K(\zeta)$ genau durch l teilbar ist, den Fermatschen Satz für die Zahlen des $K(\zeta+\zeta^{-1})$ zu beweisen. Um die Möglichkeit auszuschließen, daß eine Einheit aus $K(\zeta)$ mod l^2 kongruent einer ganzen rationalen Zahl wird, ohne selbst l-te Potenz einer Einheit zu sein, setzt Kummer voraus:

$$\pm B'_{\nu l} = \frac{B_{\nu l}}{\nu l} \not\equiv 0, \mod l^2. \tag{30}$$

Nun ist zunächst ersichtlich, daß, wenn die Bedingung (21) unseres Satzes nicht erfüllt ist, (30) immer zutrifft, denn aus

$$B'_{\nu l} \equiv 0, \quad B'_{\nu+\frac{l-1}{2}} \equiv B'_{\nu}, \mod l^2$$

würde mittels der Kongruenzen (13′) folgen, daß jedes $B_{\nu+x\frac{l-1}{2}}$ $(x=1,2,\ldots)$ durch l^2 teilbar ist, also wäre auch $B'_{\nu l-\frac{l-1}{2}} \equiv 0$, mod l^2.

Diese Kongruenz widerspricht jedoch der im vorletzten Abschnitt abgeleiteten Beziehung (23).

Trifft aber unsere Bedingung (21′) zu, so ist $\frac{B_{\nu l}}{\nu l} \not\equiv 0$, mod l^2 gleichbedeutend mit einer Aussage über die Permutation, die die Klassen von $K(\varepsilon)$ durch die Substitution s erfahren; es wird durch $\frac{B_{\nu l}}{\nu l} \not\equiv 0$ in der Äquivalenz (29) von Satz XI für den Exponenten der Wert $y = 2\nu$ ausgeschlossen. Man kann das in folgender Weise ausdrücken: Die Aussagen

$$\frac{B_{\nu l}}{\nu l} \not\equiv 0, \mod l^2 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{P}^{s-r^{l-1}} \not\sim 1$$

sind äquivalent.

Gehen wir jetzt noch auf den Fall ein, daß (immer unter der Voraussetzung einer genau durch l teilbaren Klassenzahl von $K(\zeta)$)

$$\mathfrak{P}^{s-r^{l-1}} \sim 1$$

sein könnte. Wir setzen $\mathfrak{P}^{l^2} = (\Pi)$ und können die Zahl Π so normieren, daß

$$\Pi^{S-r^{l-1}} = A_2^{l^2} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[l^2]{\Pi^S} = (\sqrt[l^2]{\Pi})^{r^{l-1}} \cdot A_2 \tag{31}$$

wird; A_2 ist eine Zahl aus $K(\varepsilon)$.

Durch Adjunktion von $\sqrt[l^2]{\Pi}$ zu $K(\varepsilon)$ entsteht ein Körper $\tilde{K} = K(\sqrt[l^2]{\Pi}, \varepsilon)$, der ersichtlich ein Oberkörper von $K(\zeta)$ ist und dessen Relativdiskriminante nur mit l teilerverwandt ist. Die relativkonjugierterten in bezug auf $K(\zeta)$ zu einer Zahl $Z = Z(\sqrt[l^2]{\Pi}, \varepsilon)$ sind

$$Z^{(i;k)} = Z(\varepsilon^i \sqrt[l^2]{\Pi^{S^k}};\ \varepsilon^{S^k}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, l^2 - 1;\ k = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Aus (31) folgt, daß $Z^{(i;k)}$ wieder dem Körper $\tilde{K}$ angehört; daher ist $\tilde{K}$ relativgalois'sch in bezug auf $K(\zeta)$ und seine Relativgruppe wird durch die Potenzen und Produkte von

$$S = (\varepsilon : \varepsilon^{r^{l-1}}) = (\varepsilon : \varepsilon \zeta^{\frac{r^{l-1}-1}{l}}) \qquad \text{und} \qquad T = (\sqrt[l^2]{\Pi} : \varepsilon \sqrt[l^2]{\Pi})$$

gebildet. Die Relativgruppe ist aber auch kommutativ, also $\tilde{K}$ relativ-Abelsch, was daraus folgt, daß sowohl für $(Z^T)^S = Z^{TS}$ als auch für $(Z^S)^T = Z^{ST}$ der Ausdruck

$$Z(\varepsilon^{r^{l-1}} (\sqrt[l^2]{\Pi})^{r^{l-1}} \cdot A_2;\ \varepsilon^{r^{l-1}})$$

erhalten wird. Die Invarianten der Relativgruppe sind l^2 und l und zu ihrer Untergruppe $1, S, \ldots, S^{l-1}$ gehört ein Körper K' über $K(\zeta)$. Nun ist K' relativzyklisch vom Grade l^2 in bezug auf $K(\zeta)$; seine Relativdiskriminante enthält, als Teiler der Relativdiskriminante von $\tilde{K}$ in bezug auf $K(\zeta)$, nur das Ideal λ und man hätte K' als Strahlklassenkörper (vgl. z. B. R. Fueter, „Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation ...“ Kap. II) des $K(\zeta)$ anzusprechen für diejenige Klasseneinteilung, bei der zwei Ideale von $K(\zeta)$ dann und nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient kongruent einer ganzen rationalen Zahl mod $l^2\lambda$ gemacht werden kann.

§ 9.

In der Literatur sind seit Kummer die irregulären Klassen mehrmals behandelt worden und es sind, immer zu dem Zweck, Teile des letzten Fermatschen Satzes zu beweisen, über die Eigenschaften des $K(\zeta)$ und des $K(\varepsilon)$ gewisse Voraussetzungen gemacht werden, mit denen wir uns noch kurz befassen wollen.

In einer in den Göttinger Nachrichten 1910 (S. 420 erschienenen Mitteilung beweist E. Hecke den ersten Teil des Fermatschen Satzes unter der Voraussetzung, daß es (in unserer Ausdrucksweise) in der Klassengruppe (5) des $K(\zeta)$ gleichviel, je $\frac{e}{2}$, $\mathfrak{p}$- und $\mathfrak{q}$-Basisklassen gebe. Da nach früherem (vgl. insbesondere Satz VI) die einem $\mathfrak{q}$-Ideal zugehörige singuläre Primärzahl ω_q, $\left(\frac{\omega_q}{\mathfrak{q}}\right) = +1$, ein Produkt l-ter Potenzen von $\mathfrak{p}$-Idealen ist, folgt aus der Anzahlsgleichheit der $\mathfrak{p}$- und der $\mathfrak{q}$-Basisklassen, daß sämtliche $\frac{e}{2}$ Hauptideale $\mathfrak{p}_i^{l^{h_i}}$ durch primäre Zahlen repräsentiert werden können, da ja aus ihnen $\frac{e}{2}$ unabhängige singuläre Primärzahlen zu bilden sind; diese Eigenschaft aber ist das Wesentliche, das zu dem dann folgenden Beweise des ersten Teiles des Fermatschen Satzes gebraucht wird.

Das gleiche Thema behandelt F. Bernstein in zwei ebenfalls in den Göttinger Nachrichten 1910, S. 482 und S. 506, enthaltenen Mitteilungen.

In der ersten Arbeit wird — für den Beweis des Fermatschen Satzes — vorausgesetzt (wieder unter Benutzung der hier eingeführten Bezeichnungen):

1. daß der zweite Faktor der Klassenzahl von $K(\zeta)$ durch l teilbar ist; es gibt also $\mathfrak{q}$-Ideale:

2. daß in demjenigen Teilklassenkörper $\overline{Kk}$ von $K(\zeta)$, der zu der Untergruppe aller $\mathfrak{q}$-Klassen gehört, alle diejenigen $\mathfrak{p}$-Ideale in die Hauptklasse fallen, für die in $K(\zeta)$ $\mathfrak{p}^l \sim 1$ gilt.

Diese beiden Voraussetzungen zusammen sind inhaltsgleich mit der Heckeschen Annahme. Denn, wenn man die gleichen Überlegungen, die in § 2 dieser Bernsteinschen Arbeit für die Zahl $a + \zeta^r b$ angestellt sind, auf die Zahlen π_i, $(\pi_i) = \mathfrak{p}_i^{l^{h_i}}$, überträgt, ergibt sich, daß jedes π_i durch Multiplikation mit einer geeigneten Einheit zu einer primären Zahl, daher also zu einer singulären Primärzahl des $K(\zeta)$ gemacht werden kann. Da jedoch nach früherem zu jedem singulär-primären π_i ein $\mathfrak{q}$-Klassenverband gehört — und zu verschiedenen π_i voneinander unabhängige $\mathfrak{q}$-Klassenverbände — und da nicht mehr $\mathfrak{q}$-Basisklassen existieren können als $\mathfrak{p}$-Basisklassen, so müssen in der Klassengruppe von $K(\zeta)$ gleichviel, je $\frac{e}{2}$, $\mathfrak{p}$-Basen und $\mathfrak{q}$-Basen vorhanden sein.

Das aber ist die Heckesche Voraussetzung, aus der umgekehrt wieder beide Bernsteinsche Annahmen gefolgert werden können. Denn einmal müssen bei der Heckeschen Bedingung, da die Klassenzahl von $K(\zeta)$ überhaupt durch l teilbar gedacht ist, auch $\mathfrak{q}$-Ideale existieren; außerdem können hier, wie erwähnt, alle Hauptideale $\mathfrak{p}_i^{l^{h_i}}$ durch primäre Zahlen π_i

epräsentiert werden; die zu den einzelnen $\mathfrak{q}$-Klassenverbänden gehörigen, nsgesamt in $\overline{Kk}$ enthaltenen Teilklassenkörper vom Relativgrad l in bezug uf $K(\zeta)$ entstehen durch Adjunktion der Zahlen $\sqrt[l]{\pi_i}$ und in diesen Körern und daher in $\overline{Kk}$ geht $\mathfrak{p}_i^{h_i-1}$ in die Hauptklasse über; letzteres nun st die zweite Bernsteinsche Annahme.

In seiner zweiten Arbeit macht Bernstein Voraussetzungen über die Klassengruppe des $K(\varepsilon)$, um die Kummersche Voraussetzung

30) $$\frac{B_\nu l}{\nu l} \not\equiv 0, \mod l^2$$

u umgehen.

Die erste dieser Voraussetzungen, die besagt, daß für irreguläres l lie Klassenzahl von $K(\zeta)$ genau einmal durch l teilbar sein soll, kann urch einfache Teilbarkeitsbetrachtungen an dem Kummerschen Ausrucke (16) für den ersten Klassenzahlfaktor als nie erfüllbar dargetan erden.

Die zweite Voraussetzung ist, daß der Körper $K(\varepsilon)$ nur $\mathfrak{P}$-Ideale, ämtlich von der Ordnung l, enthalte. Wir führen kurz einige Folgerungen n, die daraus für $K(\zeta)$ und $K(\varepsilon)$ gezogen werden können.

1. Die Basis der Klassengruppe von $K(\zeta)$ würde aus e $\mathfrak{p}$-Klassen -ter Ordnung $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_e$ gebildet werden.

2. Eine Basis der irregulären Klassengruppe von $K(\varepsilon)$ wären die l Klassen l-ter Ordnung

$$\mathfrak{P}_i^{S^k} \quad (i = 1, 2, \ldots, e;\ k = 0, 1, \ldots, l-1;\ \mathfrak{P}_i^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = \mathfrak{p}_i);$$

3. In der Klassenzahl von $K(\varepsilon)$ wäre daher genau die Potenz l^{el} ethalten.

4. So oft für $\nu < \frac{l-1}{2}$ $B_\nu \equiv 0, \mod l$ ist, müßten noch $l-1$ Konruenzen erfüllt sein, deren erste

$$B'_{\nu+\frac{l-1}{2}} \equiv B'_\nu, \mod l^2$$

nd

$$B'_{\nu+l-1} - 2B'_{\nu+\frac{l-1}{2}} + B'_\nu \equiv 0, \mod l^3$$

auten[3]).

[3]) Ad 2., 3., 4. Dies ergibt sich so:

Eine „Basis" (7) der irregulären Klassengruppe von $K(\varepsilon)$ wird nach Satz V urch e Klassen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_e$ gebildet, die hier notwendig $\mathfrak{P}$-Klassen sind und die im linblick auf Satz F der Einleitung so gewählt sein mögen, daß $\mathfrak{P}_i^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = \mathfrak{p}_i$ t. Nach (7″) ist $\mathfrak{P}_i^{(1-S)\mathfrak{p}_l} = \mathfrak{j}$ und nach der zweiten Bernsteinschen Voraussetzung

Wie nun von uns gezeigt, sind die Bedingungen 2, 3, 4 für die drei einfachsten von Kummer behandelten Fälle nicht erfüllt und die Klasse der den Kummerschen Voraussetzungen genügenden l wird durch die Bernsteinschen Betrachtungen im allgemeinen nicht umfaßt. Hiernach wäre die Einleitung der genannten Arbeit zu berichtigen. —

$\mathfrak{P}_i^l = 1$, so daß jedenfalls $p_i \leqq l-1$ ist. Wäre nun $p_i < l-1$, so würden wir setzen $\frac{l}{(1-\zeta)^{l-1}} = \eta(\zeta)$, woraus in bekannter Weise für eine Unbestimmte x die Formel $l = (1-x)^{l-1} \cdot \eta(x) + (1+x+\ldots+x^{l-1}) + F(x)(1-x^l)$ mit $F(x)$ als Polynom in x mit ganzen Koeffizienten hervorgeht; wir könnten nun $\mathfrak{P}_i^{(1-S)p_i}$ mit $(1-S)^{l-1-p_i} \cdot \eta(S)$ potenzieren:

$$\mathfrak{P}_i^{(1-S)^{l-1} \cdot \eta(S)} = 1,$$

$$\mathfrak{P}_i^{l-1-S-\ldots-S^{l-1}} = 1,$$

$$\mathfrak{P}_i^l = \mathfrak{P}_i^{1+S+\ldots+S^{l-1}} = \mathfrak{p}_i \quad (\text{in } K(\varepsilon)).$$

Da nun nach unserem Satz VII die $\mathfrak{p}$-Klasse $\mathfrak{p}_i$ auch in $K(\varepsilon)$ nicht in die Hauptklasse übergeht, so wäre $\mathfrak{P}_i$ eine Klasse von der Ordnung l^2 entgegen der Voraussetzung.

Daher bleibt nur der Fall $p_i = l-1$ übrig, der zu

$$\mathfrak{P}_i^{(1-S)^{l-1}} = \mathfrak{p}_i, \qquad \mathfrak{P}_i^l = 1$$

führt; es sind aber für $i = 1, 2, \ldots, e$ die l-Klassen l-ter Ordnung $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i^S, \ldots, \mathfrak{P}_i^{S^{l-1}}$ voneinander unabhängig und können als Basisklassen der irregulären Gruppe von $K(\varepsilon)$ genommen werden; es ergeben sich also genau el Basisklassen l-ter Ordnung.

Ferner genügt die Klasse $\mathfrak{P}_i$ der Bedingung $\mathfrak{P}_i^{sS-b_i} = 1$, und wenn man dies mit der Äquivalenz (22) kombiniert, so erhält man

$$\mathfrak{P}_i^{\sum_{K=0}^{l^2-l-1} Q_k (S b_i^{-1})^k} = 1.$$

Da nun $\mathfrak{P}_i^{(1-S)^{l-1}} = \mathfrak{p}_i$ ist, muß $\sum_{K=0}^{l^2-l-1} Q_K (\zeta b_i^{-1})^k$ durch $(1-\zeta)^{l-1}$ teilbar sein. Entwickelt man Σ nach Potenzen von $(1-\zeta)$, so erhält man nach geeigneter Umformung die unter 4. erwähnten Kongruenzen, deren erste ausführlich in § 7 abgeleitet wurde.

(Eingegangen am 14. Mai 1923.)

Über die neuen Methoden zur Berechnung von Differentialinvarianten.

Von

Gerhard Kowalewski in Dresden.

In jüngster Zeit ist das Verfahren zur Berechnung der Differentialnvarianten ebener Transformationsgruppen wesentlich vereinfacht worden. Einen ersten Fortschritt erzielte ich bei meinen Arbeiten über G. Picks natürliche Geometrie (Leipziger Ber. 5. 12. 1921 und 8. 5. 1922). Ich zeigte, daß man ohne den Umweg über die kanonische Form, den Lie gegangen war, mit Quadraturen zum Ziele kommt. Nur drei Ausnahmefälle, auch von Lie als solche bezeichnet, entziehen sich meiner Quadraturenmethode, die übrigens auch dann noch durchführbar bleibt, wenn nicht die infinitesimalen Transformationen selbst, sondern die sogenannten Definitionsgleichungen gegeben sind. Hierauf bin ich durch Engels neueste bedeutsame Arbeit (Leipziger Ber. 8. 5. 1922) aufmerksam geworden, worin das Problem der Differentialinvarianten insofern eine beträchtliche Förderung erfährt, als für drei wichtige Gruppentypen die integrationslose Berechnung jener Größen aus den allgemein gehaltenen Definitionsgleichungen gelehrt wird. Ich bin dann in drei neueren Arbeiten (Leipziger Ber. 11. 6. 1923 und Math. Zeitschrift 1923) in dieser Richtung weiter vorgedrungen, indem ich die integrationslose Berechnung von Differentialinvarianten bei mehreren andern Gruppentypen durchführte.

Auch für die Berechnung der Differentialinvarianten aus den kanonischen Formen der einzelnen Gruppen, wie sie in Lies berühmter Abhandlung „Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen usw." (Norwegisches Archiv 1883, Math. Annalen Bd. 32) unternommen und später in den Dissertationen von Heineck-Leipzig (1899) und Nohel-Prag (Sitzungsber. der Wiener Akademie 1914) nachprüfend wiederholt wurde, läßt sich aus den erwähnten neueren Ergebnissen Nutzen ziehen. Die mühsamen Integrationen vollständiger Systeme, die dabei als Hilfs-

mittel benutzt wurden und oft so verwickelt waren, daß man sich die explizite Angabe des Endresultats versagen mußte, lassen sich ganz ersparen. Meistens kommt man sogar ohne jede Integration zum Ziele. Es dürfte nicht ohne Interesse sein, diese vereinfachte Berechnungsweise der Differentialinvarianten kurz darzulegen und durch einige Beispiele zu erläutern.

§ 1.

Fundamentalsatz über invariante Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Eine Hauptstütze des neuen Verfahrens zur Berechnung von Differentialinvarianten bildet folgender Satz, der in einer meiner letzten Arbeiten vorkommt (Leipziger Ber. 26. 2. 1923), wenn auch nicht in so allgemeiner Fassung, wie hier:

Kennt man bei einer ebenen Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ ein invariantes Bogenelement $\omega(e_\alpha)\,dx$, ein invariantes Flächenelement $\Omega(e_\beta)(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$ und eine invariante Differentialgleichung $y_\gamma - \varphi(e_{\gamma-1}) = 0$, letztere von höherer als 1. Ordnung, so ist

$$(y_\gamma - \varphi)\,\Omega\,\omega^{-\gamma-1}$$

eine Invariante, die sich auch auf eine Konstante reduzieren kann.

Unter e_ν verstehen wir hierbei ein Kurvenelement ν-ter Ordnung, also, analytisch gesprochen, ein Wertsystem $x, y, y_1, \ldots, y_\nu$. Die Ableitungen von y nach x werden durch angehängte Indizes bezeichnet.

Der Beweis des obigen Fundamentalsatzes ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, wie sich die „Erweiterung" einer Transformation

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y) \tag{1}$$

auf Kurvenelemente vollzieht. Es treten bei diesem Prozeß der Reihe nach folgende Gleichungen hinzu:

$$Y_1 = \frac{g_x + g_y \cdot y_1}{f_x + f_y \cdot y_1},$$

$$Y_2 = \frac{(f_x g_y - f_y g_x)\,y_2}{(f_x + f_y \cdot y_1)^3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_\varrho = \frac{(f_x g_y - f_y g_x)\,y_\varrho}{(f_x + f_y \cdot y_1)^{\varrho+1}} + \ldots, \text{ usw.}$$

Durch $+\ldots$ werden jedesmal die von der höchsten Ableitung freien Bestandteile angedeutet. Gehört nun die Transformation (1) der Gruppe $\mathfrak{G}$ an, bei der die Differentialgleichung $y_\gamma - \varphi(e_{\gamma-1}) = 0$ invariant bleibt

$\gamma > 1$), so muß offenbar vermöge der erweiterten Transformation die
dentität

$$Y_\gamma - \varphi(E_{\gamma-1}) = \frac{(f_x g_y - f_y g_x)\{y_\gamma - \varphi(e_{\gamma-1})\}}{(f_x + f_y \cdot y_1)^{\gamma+1}}$$

estehen. Andererseits ist aber nach unseren übrigen Voraussetzungen

$$\omega(E_\alpha)\, dX = \omega(e_\alpha)\, dx,$$
$$\Omega(E_\beta)(dX \,\mathfrak{d}\, Y - dY \,\mathfrak{d}\, X) = \Omega(e_\beta)(dx \,\mathfrak{d}\, y - dy \,\mathfrak{d}\, x),$$

ithin

$$\omega(E_\alpha) = (f_x + f_y \cdot y_1)^{-1}\, \omega(e_\alpha),$$

$$\Omega(E_\beta) = (f_x g_y - f_y g_x)^{-1}\, \Omega(e_\beta).$$

s folgt also

$$\{Y_\gamma - \varphi(E_\gamma)\}\, \Omega(E_\beta)\, [\omega(E_\alpha)]^{-\gamma-1} = \{y_\gamma - \varphi(e_\gamma)\}\, \Omega(e_\beta)\, [\omega(e_\alpha)]^{-\gamma-1},$$

as zu beweisen war.

Das Beweisverfahren läßt sich auch dann noch aufrechterhalten, enn eine *gemischte* invariante Differentialgleichung vorliegt, die außer $y, y_1, \ldots, y_\gamma$ noch andere Größen enthält, auf die man die Gruppe $\mathfrak{G}$ weitert hat. Ebenso dürfen $\omega\, dx$ und $\Omega(dx \,\mathfrak{d}\, y - dy \,\mathfrak{d}\, x)$ mit diesen nderen Größen behaftet sein, *also gemischte* invariante Bogen- und lächenelemente darstellen.

In gewissen Fällen kann man voraussagen, daß die Invariante $(y_\gamma - \varphi)\, \Omega\, \omega^{-\gamma-1}$ keine eigentliche Differentialinvariante, sondern eine Konante ist. Wenn z. B. die Gruppe $\mathfrak{G}$ keine Differentialinvariante von geingerer als $(r-1)$-ter Ordnung hat, also die Kurvenelemente $(r-2)$-ter rdnung *transitiv* vertauscht, so muß sich, sobald α, β, γ alle drei unterlb $r-1$ liegen, die Invariante unseres Fundamentalsatzes auf eine onstante reduzieren[1]). Ist man in der Lage, *zwei* invariante Differentialeichungen der Ordnungen $2, \ldots, r-2$ zu kennen, so lassen sich zwei onstante Invarianten angeben, und man gewinnt auf diese Weise das variante Bogenelement und das invariante Flächenelement niedrigster rdnung ohne jede Integration. Daß es ein invariantes Bogenelement und lächenelement von höchstens $(r-2)$-ter Ordnung gibt, läßt sich unter enutzung der oben angegebenen Transitivitätsbedingung leicht nachweisen, wobei allerdings im Falle des Bogenelements $r > 2$ angenommen erden muß, um Ausnahmen fernzuhalten. Das niedrigste invariante ogenelement bezeichnet man auch kurz als „*das* Bogenelement der ruppe $\mathfrak{G}$“. Entsprechendes gilt für das niedrigste invariante Flächenement. Beide Größen liegen bis auf konstante Faktoren fest.

[1]) Wir denken hierbei nur an ungemischte Invarianten.

Wenn neben einer invarianten Differentialgleichung höherer Ordnung ein invariantes Bogenelement gegeben ist, so kann man sofort ein invariantes Flächenelement hinschreiben, nämlich $(y_\gamma - \varphi)^{-1}\omega^{\gamma+1}(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$. Hat man neben der invarianten Differentialgleichung ein invariantes Flächenelement, so wird $\{(y_\gamma - \varphi)\,\Omega\}^{\frac{1}{\gamma+1}}dx$ ein invariantes Bogenelement sein. Dies geht aus den Gleichungen (2), (3), (4) in Verbindung mit

$$dX = (f_x + f_y \cdot y_1)\,dx, \qquad dX\,\delta Y - dY\,\delta X = (f_x g_y - f_y g_x)(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$$

hervor.

§ 2.

Anwendung auf die drei primitiven Gruppentypen.

Bei der *allgemeinen projektiven Gruppe* $\mathfrak{G}_8$ hat man außer $y_2 = 0$ die invariante Differentialgleichung $(y_2^{-\frac{2}{5}})''' = 0$, die noch mit dem Faktor $y_2^{\frac{6}{5}}$ zu multiplizieren ist, um sie dem Fundamentalsatz anzupassen. Da $\mathfrak{G}_8$ auf die Kurvenelemente 6. Ordnung transitiv einwirkt, gibt es ein invariantes Bogenelement $\omega_8 dx$ und ein invariantes Flächenelement $\Omega_8(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$ von geringerer als 7. Ordnung, und man kann nach dem Fundamentalsatz schreiben:

$$y_2\,\Omega_8\,\omega_8^{-3} = 1, \qquad y_2^{\frac{5}{3}}(y_2^{-\frac{2}{5}})'''\,\Omega_8\,\omega_8^{-6} = 1,$$

wobei ω_8 und Ω_8 die Konstanten, die auf der rechten Seite stehen müßten, aufgesogen haben. Es ergibt sich aus obigen Gleichungen, *daß*

$$\{y_2^{\frac{3}{5}}(y_2^{-\frac{2}{5}})'''\}^{\frac{1}{5}}dx \tag{5}$$

das Bogenelement und

$$y_2^{-\frac{1}{5}}(y_2^{-\frac{2}{5}})'''(dx\,\delta y - dy\,\delta x) \tag{6}$$

das Flächenelement der allgemeinen projektiven Gruppe ist.

Bei der *allgemeinen linearen Gruppe* $\mathfrak{G}_6$, die auf die Kurvenelemente 4. Ordnung transitiv einwirkt, hat man außer den schon angegebenen invarianten Differentialgleichungen (der geraden Linien und der Kegelschnitte) noch die der Parabeln $(y_2^{-\frac{2}{5}})'' = 0$. Sie muß, um dem Fundamentalsatz angepaßt zu werden, den Faktor $y_2^{\frac{5}{3}}$ erhalten. Ist $\omega_6 dx$ das Bogenelement, $\Omega_6(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$ das Flächenelement der Gruppe $\mathfrak{G}_6$, so kann man nach dem Fundamentalsatz schreiben

$$y_2\,\Omega_6\,\omega_6^{-3} = 1, \qquad y_2^{\frac{5}{3}}(y_2^{-\frac{2}{5}})''\,\Omega_6\,\omega_6^{-5} = 1$$

nd findet auf diese Weise

7) $$\left\{ y_2^{\frac{2}{3}} (y_2^{-\frac{1}{3}})'' \right\}^{\frac{1}{2}} dx$$

ls *Bogenelement*,

8) $$(y_2^{-\frac{1}{3}})''^{\frac{3}{2}} (dx\,\delta y - dy\,\delta x)$$

ls *Flächenelement der allgemeinen linearen Gruppe*. Da ferner nach dem undamentalsatz

$$y_2^{\frac{5}{3}} (y_2^{-\frac{1}{3}})''' \, \Omega_6 \, \omega_6^{-6}$$

ine Invariante ist, so ergibt sich als *niedrigste Differentialinvariante er allgemeinen linearen Gruppe*

9) $$y_2^{-\frac{1}{3}} (y_2^{-\frac{1}{3}})''^{-\frac{3}{2}} (y_2^{-\frac{1}{3}})'''.$$

Bei der *speziellen linearen Gruppe* $\mathfrak{G}_5$, die auf die Kurvenelemente . Ordnung transitiv einwirkt, gilt für das Bogenelement und Flächenlement auf Grund des Fundamentalsatzes die Relation

$$y_2 \, \Omega_5 \, \omega_5^{-3} = 1 .$$

Da es sich um eine flächentreue Gruppe handelt, ist $\Omega_5 = 1$, und man ndet als *Bogenelement der speziellen linearen Gruppe*

10) $$y_2^{\frac{1}{3}} dx .$$

Nach dem Fundamentalsatz ist $y_2^{\frac{5}{3}} (y_2^{-\frac{1}{3}})'' \, \Omega_5 \, \omega_5^{-5}$ eine Invariante. Es erbt sich auf diese Weise als *niedrigste Differentialinvariante der speziellen inearen Gruppe*

11) $$(y^{-\frac{1}{3}})''.$$

Um schließlich auch die *niedrigste Differentialinvariante der allemeinen projektiven Gruppe* $\mathfrak{G}_8$ zu finden, gehen wir von einer gemischen invarianten Differentialgleichung dieser Gruppe aus, und zwar von er Differentialgleichung der Kegelschnitte, die eine beliebige Gerade $= y - a x - b = 0$ berühren. Diese Differentialgleichung lautet, wenn an die Abkürzung $y_2^{-\frac{1}{3}} = u$ einführt,

12) $$Q = L^2 u_2 - 2 L L_1 u_1 + 2 L_1^2 u - 4 L u^{-\frac{1}{2}} = 0 .$$

ie muß, um dem Fundamentalsatz angepaßt zu werden, den Faktor $^{-2} y_2^{\frac{5}{3}}$, d. h. $L^{-2} u^{-\frac{5}{2}}$ erhalten. Nach dem Fundamentalsatz ist dann

$$J = L^{-2} u^{-\frac{5}{2}} Q \, \Omega_8 \, \omega_8^{-5} = L^{-2} u^{-\frac{1}{3}} u_3^{-\frac{2}{3}} Q$$

ine *gemischte Differentialinvariante* der Gruppe $\mathfrak{G}_8$. Erteilt man J nen festen Wert $1 : c$, so entsteht eine gemischte invariante Differential-

gleichung 5. Ordnung. Sie definiert eine Schar von ∞^5 Kurven, die mit der Geraden $L = 0$ invariant verknüpft sind. Diese ∞^2 Scharen von ∞^5 Kurven vereinigen sich zu einer bei $\mathfrak{G}_8$ invarianten Schar von ∞^7 Kurven, deren Differentialgleichung sich leicht aufstellen läßt. Aus

$$c\,Q = L^2\,u^{\frac{1}{3}}\,u_3^{\frac{2}{3}} \tag{13}$$

folgt nämlich durch Differentiation, da Q die Ableitung $L^2\,u_3$ hat,

$$c\,u^{-\frac{1}{3}}\,u_3^{\frac{1}{3}} = 2\,L^{-1}\,L_1 + \frac{d\log(u^{\frac{1}{3}}\,u_3^{\frac{2}{3}})}{dx} \tag{14}$$

und durch nochmalige Differentiation

$$c\,\frac{d(u^{-\frac{1}{3}}\,u_3^{\frac{1}{3}})}{dx} = -\,2\,L^{-2}\,L_1^2 + 2\,L^{-1}\,u^{-\frac{3}{2}} + \frac{d^2\log(u^{\frac{1}{3}}\,u^{\frac{7}{3}})}{dx^2}. \tag{15}$$

Hiermit verbinde man die mit $c^{-1}\,u^{-1}\,L^{-2}$ multiplizierte Gleichung (13), also

$$c^{-1}\,u^{-\frac{2}{3}}\,u_3^{\frac{2}{3}} = u^{-1}\,u_2 - 2\,L^{-1}\,L_1\,u^{-1}\,u_1 + 2\,L^{-2}\,L_1^2 - 4\,L^{-1}\,u^{-\frac{3}{2}}, \tag{13'}$$

und eliminiere aus (14), (15), (13′) die beiden Größen $L^{-1}\,L_1$ und L^{-1}. Dann findet man die gesuchte invariante Differentialgleichung 7. Ordnung in folgender Form:

$$c^{-1} + \frac{1}{2}c^2 = u^{\frac{2}{3}}\,u_3^{-\frac{2}{3}}\left\{u^{-1}\,u_2 + 2\,\frac{d^2\log(u^{\frac{1}{3}}\,u_3^{\frac{2}{3}})}{dx^2} + \frac{1}{2}\,\frac{d\log(u^{\frac{1}{3}}\,u_3^{\frac{2}{3}})}{dx}\,\frac{d\log(u^{\frac{5}{3}}\,u_3^{-\frac{2}{3}})}{dx}\right\} \tag{16}$$

Da die linke Seite eine willkürliche Konstante ist, so stellt die rechte die noch fehlende niedrigste Differentialinvariante der allgemeinen projektiven Gruppe dar. Ausführlicher geschrieben lautet sie, nach Hinzufügung eines Zahlenfaktors,

$$u^{-\frac{4}{3}}\,u_3^{-\frac{8}{3}}\,(30\,u\,u_2\,u_3^2 - 7\,u_1^2\,u_3^2 + 8\,u\,u_1\,u_3\,u_4 - 28\,u^2\,u_4^2 + 24\,u^2\,u_3\,u_5).$$

Führt man die Multiplikation aus, so entstehen 5 Glieder von der Form $A\,u^{\alpha_0}\,u_1^{\alpha_1}\,u_2^{\alpha_2}\,u_3^{\alpha_3}\,u_4^{\alpha_4}\,u_5^{\alpha_5}$ mit der Eigenschaft

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0,$$
$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + 4\,\alpha_4 + 5\,\alpha_5 = 0.$$

Schreibt man jedem u_ν die Dimension 1 und das Gewicht ν zu, so ist also die Differentialinvariante von 0-ter Dimension und vom Gewicht Null. Sie ist meines Wissens in dieser expliziten Form noch nicht angegeben worden.

(Eingegangen am 1. August 1923.)

Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen.

Von

E. Study in Bonn.

Teil III.

Inhalt.

§ 8. Über die automorphen konformen Transformationen einer Sphäre oder einer Inversion.

§ 9. Die automorphen konformen Transformationen von Kreisen und die zugehörigen Spiegelungen.

§ 10. Verschiedene Ergänzungen.

§ 8.

Über die automorphen konformen Transformationen einer Sphäre oder einer Inversion.

Zu der im vorigen Paragraphen erklärten Zusammensetzung linearer der quasi-linearer Transformationen von Quaternionenpaaren gehört eine nvariantentheorie, die Invariantentheorie der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}, \mathfrak{H}_{16}$, die — ie die Formeln (136) und (137) zeigen — eine gewisse Analogie hat it der Theorie der binären Formen, deren Entwicklung aber eine viel mfangreichere und schwerlich leichte Aufgabe sein wird. Für uns kommt nächst in Betracht, daß wir nun ein vollkommeneres Ausdrucksmittel ir einige der im § 6 behandelten Tatsachen zur Verfügung haben, als es ort zur Verwendung gekommen war.

Wir betrachten nochmals die uneigentlichen konformen Transforma- onen, nun aber unter dem Bilde der ihnen, wenn auch nicht eindeutig, ugeordneten bilinearen Formen, und finden, daß für Formen dieser rt, also für Formen der Typen $[\Sigma]$, $[S]$, der Inbegriff der Zerlegungen

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma &= \tfrac{1}{2}(\Sigma + {}'\Sigma) + \tfrac{1}{2}(\Sigma - {}'\Sigma)\\ S &= \tfrac{1}{2}(S + {}'S) + \tfrac{1}{2}(S - {}'S)\end{aligned}} \tag{139}$$

die Invarianteneigenschaft hat: Jede bleibt ungeändert bei Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, und beide werden vertauscht bei Transformationen aus der Schar $\mathfrak{H}_{16}$. Dabei entsprechen sich die identischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\Sigma - {}'\Sigma &= 0 \quad \text{und} \quad F = 0\\ \Sigma + {}'\Sigma &= 0 \quad \text{und} \quad G = 0\end{aligned} \quad \text{(Nr. 89).}$$

Sind also die Nablafunktionen $\{\Sigma\}$ *und* $\{S\}$ *nicht Null, so gehören zu reellen Formen* Σ *und* S, *wenn* (*identisch*) $\Sigma + {}'\Sigma = 0$, $S + {}'S = 0$ *ist, Spiegelungen an idealen oder realen Sphären* (*Inversionen*), *und wenn* $\Sigma - {}'\Sigma = 0$, $S - {}'S = 0$ *ist, so gehören zu ihnen Spiegelungen an* (*Paaren von*) *reellen Kreisen. Zu verschwisterten Formen gehört dieselbe Spiegelung.*

Im ersten Falle ist dann, wie gesagt,

$$\Sigma^{-1} = -S, \quad S^{-1} = -\Sigma, \tag{140}$$

und im zweiten

$$\Sigma^{-1} = S, \quad S^{-1} = \Sigma. \tag{141}$$

Wir betrachten nun den ersten Fall, nehmen also an, es sei

$$\boxed{\Sigma + {}'\Sigma = 0, \quad S + {}'S = 0}. \tag{142}$$

Setzen wir dann, nach Anleitung der Formel Nr. 92,

$$[\Sigma] = lr - mn, \quad [S] = \lambda\varrho - \nu\mu, \tag{143}$$

so sind damit *numerische* Quaternionen bezeichnet, und es ist

$$[\Sigma]^2 = \{\Sigma\}, \quad [S]^2 = \{S\} \tag{144}$$

$$[\Sigma]\cdot[S] = 1, \tag{145}$$

$$\begin{aligned}&l + \tilde{r} = 0, \quad m - \tilde{m} = 0, \quad n - \tilde{n} = 0, \quad r + \tilde{l} = 0\\ &\lambda + \tilde{\varrho} = 0, \quad \nu - \tilde{\nu} = 0, \quad \mu - \tilde{\mu} = 0, \quad \varrho + \tilde{\lambda} = 0\end{aligned} \tag{146}$$

und

$$\boxed{\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix} = [\Sigma]\cdot\begin{pmatrix}l & n\\ m & r\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}l & m\\ n & r\end{pmatrix} = [S]\cdot\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \nu & \varrho\end{pmatrix}} \tag{147}$$

(Vgl. Nr. 91*l* und 91*r*.)

Wie man auf Grund der in § 4 angestellten Betrachtung leicht erkennt, gehört nun zu der mit Σ und S verbundenen reellen Inversion eine Gruppe automorpher konformer Transformationen, die zwei Schichten T_{10}, H_{10} umfaßt. Und zwar enthält jede dieser Schichten einen einzigen reellen Zug (ein einziges Kontinuum *reeller* Transformationen), wenn die Inzidenzsphäre der Inversion ideal ist $\{[S], [\Sigma] > 0\}$, und sie enthält ihrer zwei im anderen Falle $\{[S], [\Sigma] < 0\}$.

Da jede uneigentliche automorphe Transformation der Inversion (Σ, S) sich durch Zusammensetzung einer eigentlichen automorphen Transformation mit der Inversion selbst ergibt, so genügt es, eigentliche Transformationen zu betrachten. Jeder mit der Inversion vertauschbaren eigentlichen linearen Transformation lassen sich nun zwei Paare verschwisterter Formen T, T und $-T, -\mathsf{T}$ so zuordnen, daß

$$T^{-1} S \mathsf{T} = \varrho \cdot S, \qquad \mathsf{T}^{-1} \Sigma T = \varrho^{-1} \cdot \Sigma$$

wird, und wenn S und Σ reell sind, so können auch T und T reell sein, und der Proportionalitätsfaktor ϱ wird dann ebenfalls reell. Da $T^{-1} = {}'\mathsf{T}$ sein soll und ${}'\mathsf{T}$ linear von T abhängt, so kann man das Formenpaar T, T insbesondere noch so wählen, daß ϱ einen der Werte ± 1 enthält. Und zwar liegt augenscheinlich nur die erste Möglichkeit vor $(\varrho > 0)$, wenn es sich um eine ideale Sphäre handelt, während im anderen Falle zwei Möglichkeiten $(\varrho \gtrless 0)$ vorhanden sind. Es gilt also:

Jeder reellen eigentlichen automorphen konformen Transformation einer idealen Sphäre, d. i. jeder reellen Bewegung im vierdimensionalen sphärischen Raume läßt sich ein Paar verschwisterter reeller Formen T, T (oder $-T, -\mathsf{T}$) zuordnen, das mit den zur Sphäre gehörigen Formen S, Σ durch die Gleichungen

(148, I) $$S\mathsf{T} = TS, \qquad \Sigma T = \mathsf{T}\Sigma$$

verbunden ist.

Bei einer reellen eigentlichen automorphen Möbiusschen Transformation einer realen Sphäre, d. h. bei einer reellen Bewegung im vierdimensionalen pseudosphärischen Raume, sind dagegen zwei Fälle zu unterscheiden:

Ist die automorphe Transformation oder Bewegung „zugänglich", d. h. läßt sie die beiden Gebiete, in die der vierdimensionale Raum durch die Sphäre zerlegt wird, einzeln in Ruhe, so lassen sich ebenfalls (auf zwei Arten) Formenpaare T, T finden, so daß

(148, IIa) $$S\mathsf{T} = TS, \qquad \Sigma T = \mathsf{T}\Sigma$$

wird, und daß die zugehörige Möbiussche Transformation dann die gegebene wird[36]).

Im Falle einer „unzugänglichen Bewegung" jedoch — die die beiden genannten Gebiete vertauscht — treten an Stelle der angeführten Gleichungen diese anderen:

$$(148, \text{IIb}) \qquad S\mathsf{T} = -TS, \qquad \Sigma T = -\mathsf{T}\Sigma.$$

Wir wollen in den früher aufgeführten besonderen Fällen auch noch angeben, was die entwickelten Formeln (148) bedeuten, wenn man die darin vorkommenden Quaternionen a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einzeln in Erscheinung treten läßt[37]).

I. Es handele sich um die Spiegelung an der idealen Sphäre

$$\tilde{z}z + 1 = 0$$

oder also um die reellen Bewegungen in der zur genannten Sphäre gehörigen Maßgeometrie. Ein zugehöriges Formenpaar, vergleichbar dem Polarsystem einer positiv-definiten Hermiteschen Form, ist

$$(149) \qquad \boxed{S = \tilde{x}_1 y_1 + \tilde{x}_2 y_2, \qquad \Sigma = u_1 \tilde{v}_1 + u_2 \tilde{v}_2.}$$

Die reellen Bewegungen bilden ein einziges Kontinuum, das darstellbar ist durch ein Kontinuum von *reellen* Formen T, T (oder auch durch Formen $-T, -\mathsf{T}$), deren Koeffizienten sechs voneinander unabhängigen Beschränkungen unterliegen, nämlich den Bedingungsgleichungen

$$(150) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \tilde{a}a + b\tilde{b} = 1, & a\tilde{c} + b\tilde{d} = 0 \\ c\tilde{a} + d\tilde{b} = 0, & c\tilde{c} + d\tilde{d} = 1 \end{array}}$$

und den hiermit gleichbedeutenden Gleichungen

$$(151) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \tilde{a}a + \tilde{c}c = 1, & \tilde{a}b + \tilde{c}d = 0, \\ \tilde{b}a + \tilde{d}c = 0, & \tilde{b}b + \tilde{d}d = 1 \end{array}}$$

genügen. Es folgt daraus noch

$$(152) \qquad a\tilde{a} = d\tilde{d}, \qquad b\tilde{b} = c\tilde{c}.$$

---

[36]) Im Sinne der Nicht-Euklidischen Geometrie ist das eine der im Satze genannten Gebiete zugänglich, das andere nicht.

[37]) Über eben diese Fälle hat bereits Herr Cartan einige Angaben gemacht. (In der französischen Enzyklopädie, S. 453 und 455.) Das Wenige, was er darüber mitteilt, ist aber nicht frei von Ungenauigkeiten.

Dieses also sind die Bedingungen für die Koeffizienten der Form T. Die Koeffizienten von T sind dann

153) $$\alpha = \tilde{d}, \quad \beta = -\tilde{c}, \quad \gamma = -\tilde{b}, \quad \delta = \tilde{a}.$$

$$\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sind reziproke Matrizes.

IIa. Im Falle der automorphen Transformationen der Spiegelung an der realen Sphäre

$$\tilde{z}z - 1 = 0$$

oder also im Falle der reellen Bewegungen in der pseudosphärischen Geometrie lassen wir an Stelle der beiden Formeln (149) diese treten:

154) $$\boxed{S = \tilde{x}_1 y_1 - \tilde{x}_2 y_2, \qquad \Sigma = -u_1 \tilde{v}_1 + u_2 \tilde{v}_2.}$$

Wir erhalten dann, als Bedingungen für die Koeffizienten von T, die Gleichungen

155) $$\boxed{\begin{aligned} a\tilde{a} - b\tilde{b} &= \pm 1, & -a\tilde{c} + b\tilde{d} &= 0, \\ c\tilde{a} - d\tilde{b} &= 0, & -c\tilde{c} + d\tilde{d} &= \pm 1, \end{aligned}}$$

156) $$\boxed{\begin{aligned} \tilde{a}a - \tilde{c}c &= \pm 1, & \tilde{a}b - \tilde{c}d &= 0, \\ -\tilde{b}a + \tilde{d}c &= 0, & -\tilde{b}b + \tilde{d}d &= \pm 1. \end{aligned}}$$

Die oberen Vorzeichen beziehen sich hier auf die zugänglichen Bewegungen, die S und Σ in Ruhe lassen, die unteren auf die unzugänglichen, die S und Σ mit $-S$ und $-\Sigma$ vertauschen. Wie zuvor ist

157) $$a\tilde{a} = d\tilde{d}, \qquad b\tilde{b} = c\tilde{c}.$$

Die Koeffizienten von T sind in diesem Falle

158) $$\alpha = \pm\tilde{d}, \quad \beta = \pm\tilde{c}, \quad \gamma = \pm b, \quad \delta = \pm\tilde{a};$$

$$\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \tilde{a}, & -\tilde{c} \\ -\tilde{b}, & \tilde{d} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und reziproke Matrizen.

IIb. Der Spiegelung

$$\tilde{z} + z' = 0$$

der dem Flach $z_0 = 0$ ordnen wir zu die Formen

159) $$\boxed{S = \tilde{x}_1 y_2 + \tilde{x}_2 y_1, \qquad \Sigma = -u_1 \tilde{v}_2 - u_2 \tilde{v}_1.}$$

Es findet sich

$$(160)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} a\tilde{d}+b\tilde{c}=\pm 1, & a\tilde{b}+b\tilde{a}=0, \\ c\tilde{d}+d\tilde{c}=0, & c\tilde{b}+d\tilde{a}=\pm 1, \end{array}}$$

oder, was dasselbe aussagt:

$$(161)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} \tilde{a}d+\tilde{c}b=\pm 1, & \tilde{a}c+\tilde{c}a=0, \\ \tilde{b}d+\tilde{d}b=0, & \tilde{b}c+\tilde{d}a=\pm 1. \end{array}}$$

Ferner ist

$$(162)\qquad \alpha=\pm\tilde{a},\quad \beta=\mp\tilde{b},\quad \gamma=\mp\tilde{c},\quad \delta=\pm\tilde{d}.$$

$$\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} \tilde{d} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{a} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sind reziproke Matrizen.

Beschränkt man in den Transformationsgleichungen

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta}=z'$$

die Quaternionen z auf *vektorielle* Werte, also auf solche, für die $z+\tilde{z}=0$ ist, so erhält man *die Gruppe der reellen konformen Transformationen im dreidimensionalen Möbiusschen Kontinuum.* Diese Transformationen sind dann wieder als *„eigentliche“* und *„uneigentliche“* Transformationen zu unterscheiden, entsprechend den zweierlei Zeichen in den Formeln (160) und (161). Im komplexen Gebiete hat man es dann jedoch — wie zuvor — nur mit einem einzigen Kontinuum von $\infty^{2\cdot 10}$ Transformationen zu tun; schon die im komplexen Gebiet kontinuierliche eingliedrige Gruppe $kz=z'$ $(k=\tilde{k},\ \neq 0)$ enthält ja reelle Transformationen der beiden zu unterscheidenden Arten.

Dieselben Transformationen des dreidimensionalen Möbiusschen Kontinuums lassen sich natürlich ohne weiteres auch als Ausschnitte aus uneigentlichen Transformationen unseres vierdimensionalen Möbiusschen Kontinuums darstellen:

$$\frac{a\tilde{z}-b}{c\tilde{z}-d}=\frac{\tilde{z}\alpha-\beta}{\tilde{z}\gamma-\delta}=z'.$$

Der Zusammenhang der Möbiusschen Transformationen mit der Theorie der bilinearen Formen oder Matrizen von Quaternionen werde schließlich noch durch den folgenden Lehrsatz erläutert, in dessen Fassung ein von Cayley herrührender Gedanke zur Verwendung kommt[38]):

[38]) Vgl. Frobenius, J. f. Math. **84** (1877), S. 37, 38, Lehrsätze II, IV; und Study, Einleitung in die Theorie der Invarianten (1923), § 19.

In einer gewissen Umgebung der beiden Einheitsformen lassen sich reelle) verschwisterte Formen T, T *angeben, deren Koeffizienten gerade ehn unabhängige Parameter enthalten, und deren zugeordnete Transformationen*

$$\frac{az+b}{cz+a} = z', \qquad \frac{z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta} = z'$$

lso dort die (reellen) eigentlichen automorphen Möbiusschen Transformationen der Inversion erschöpfen, die dem durch die Gleichungen

$$\Sigma + {}'\Sigma = 0, \qquad S + {}'S = 0$$

$$\Sigma S = -\mathsf{H}, \qquad S\Sigma = -\mathsf{E}$$

erbundenen Formenpaar Σ, S *zugehört.*

Wird nämlich die Form Σ_* *so gewählt, daß* ${}'\Sigma_* = \Sigma_*$ *wird, und aß zugleich*

163) $$\{\{\Sigma + \Sigma_*\} = \{\Sigma - \Sigma_*\}\} \neq 0$$

usfällt, so gibt es eine Form S_*, *die zu* Σ_* *in der umkehrbaren Beehung*

164) $$S_* = -S\Sigma_* S, \qquad \Sigma_* = -\Sigma S_* \Sigma$$

der

165) $$\Sigma S_* = \Sigma_* S, \qquad S_*\Sigma = S\Sigma_*$$

eht, und (demzufolge) den Forderungen ${}'S_* = S_*$ *und*

166) $$\{\{S + S_*\} = \{S - S_*\}\} \neq 0$$

enügt. Es wird dann

167)
$$\mathsf{T} = \begin{cases} = (\Sigma + \Sigma_*)(\Sigma - \Sigma_*)^{-1} \\ = \dfrac{\mathsf{H} - \Sigma_* S}{\mathsf{H} + \Sigma_* S} = \dfrac{\mathsf{H} - \Sigma S_*}{\mathsf{H} + \Sigma S_*} \\ = (S - S_*)^{-1}(S + S_*), \end{cases} \qquad T = \begin{cases} = (S + S_*)(S - S^*)^{-1} \\ = \dfrac{\mathsf{E} - S_*\Sigma}{\mathsf{E} + S_*\Sigma} = \dfrac{\mathsf{E} - S\Sigma_*}{\mathsf{E} + S\Sigma_*} \\ = (\Sigma - \Sigma_*)^{-1}(\Sigma + \Sigma_*) \end{cases}$$

n Paar verschwisterter Formen, das den Gleichungen

168) $$\mathsf{T}\Sigma = \Sigma T, \qquad TS = S\mathsf{T}$$

169) $$\{\mathsf{T}\} = 1 = \{T\}$$

enügt. Ferner ist

$$\frac{16}{\{\mathsf{T}+\mathsf{H}\}} = \frac{\{\Sigma \pm \Sigma_*\}}{\{\Sigma\}}$$

170) $$= \{\mathsf{H} \pm \Sigma_* S\} = \{\mathsf{H} \pm \Sigma S_*\} = \{\mathsf{E} \pm S_*\Sigma\} = \{\mathsf{E} \pm S\Sigma_*\}$$

$$= \frac{\{S \pm S_*\}}{\{S\}} = \frac{16}{\{T+\mathsf{E}\}},$$

und

$$(171) \qquad \Sigma_* = \frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}}\Sigma = \Sigma\frac{T-\mathsf{E}}{T+\mathsf{E}}, \qquad S_* = \frac{T-\mathsf{E}}{T+\mathsf{E}}S = S\frac{\mathsf{T}-\mathsf{H}}{\mathsf{T}+\mathsf{H}}.$$

Ist umgekehrt ein Paar von (reellen) verschwisterten Formen T, T gegeben, das der Forderung (168) *genügt, so sind auch die Gleichungen* (169) *erfüllt. Für ein solches Paar ist dann auch*

$$\{\mathsf{T}+\mathsf{H}\} = \{T+\mathsf{E}\}. \qquad \text{(S. Nr. 170.)}$$

Ist dieser Ausdruck nicht Null, so liefern die Gleichungen (171) *zwei Formen Σ_* und S_*, die allen zuvor aufgezählten Gleichungen und Ungleichungen genügen, und also zur Darstellung der Formen T, T dienen können.*

Die aufgestellten Formeln leisten also zwar nicht eine Darstellung aller eigentlichen automorphen Möbiusschen Transformationen einer Inversion durch zehn voneinander unabhängige (reelle oder komplexe) Parameter, wohl aber liefern sie eine Darstellung, die nur ein Kontinuum von $\infty^{2\cdot 9}$ Transformationen ausläßt und dazu in einer genau bezeichneten Umgebung der identischen Transformation lückenlos ist, also alle infinitesimalen Bewegungen eines sphärischen oder pseudosphärischen vierdimensionalen Raumes

$$(172) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathsf{H} + d\mathsf{T} &= \mathsf{H} - 2\,d\Sigma_*\cdot S, \\ \mathsf{E} + d T &= \mathsf{E} - 2\,dS_*\cdot\Sigma \end{aligned}}$$

umfaßt, als deren Symbole man Formen $\Sigma_*\cdot dt$, $S_*\cdot dt$ ansehen kann. *Reell* darstellbar sind jedoch in dieser Gestalt im Falle $[\Sigma_*]$, $[S_*] < 0$, wie der Satz selbst zeigt, nur zugängliche Bewegungen.

Zum Beweise unseres Lehrsatzes gehen wir davon aus, daß unter den Voraussetzungen ${}'\Sigma = -\Sigma$, ${}'\Sigma_* = \Sigma_*$ die Form $\Sigma_* + \Sigma$ schon (nach dem Schema (139)) in zwei mit ihr invariant-verbundene Summanden zerlegt ist. Bei gegebenem Σ enthält sie dann so viele unabhängige Konstanten, wie die den Gleichungen

$$l - \tilde{r} = 0, \quad m + \tilde{m} = 0, \quad n + \tilde{n} = 0, \quad r - \tilde{l} = 0$$

genügende Form Σ_*, also ihrer zehn. Ihre einzigen Besonderheiten sollen die sein, daß $\{\Sigma\}$ und $\{\Sigma_* + \Sigma\} = \{\Sigma_* - \Sigma\}$ nicht Null sein dürfen. Mit $\Sigma_* + \Sigma$ ist nun verschwistert $(\Sigma_* - \Sigma)^{-1}$. Durch Zusammensetzung beider Formen entstehen verschwisterte Formen, die mit $-\mathsf{T}$ und $-T$ bezeichnet werden können; man erhält

$$\mathsf{T} = (\Sigma + \Sigma_*)(\Sigma - \Sigma_*)^{-1}, \qquad T = (\Sigma - \Sigma_*)^{-1}(\Sigma + \Sigma_*).$$

Es wird nun behauptet, daß $\mathsf{T}\Sigma = \Sigma T$ ist. In der Tat ergibt sich jede der Gleichungen

$$(\Sigma + \Sigma_*)(\Sigma - \Sigma_*)^{-1} \cdot \Sigma = \Sigma \cdot (\Sigma - \Sigma_*)^{-1}(\Sigma + \Sigma_*),$$
$$(\Sigma + \Sigma_*) \cdot (\Sigma^{-1}(\Sigma - \Sigma_*))^{-1} = ((\Sigma - \Sigma_*)\Sigma^{-1})^{-1} \cdot (\Sigma + \Sigma_*),$$
$$((\Sigma - \Sigma_*)\Sigma^{-1}) \cdot (\Sigma + \Sigma_*) = (\Sigma + \Sigma_*) \cdot (\Sigma^{-1}(\Sigma - \Sigma_*)),$$
$$(\mathsf{H} - \Sigma_* \Sigma^{-1}) \cdot (\Sigma + \Sigma_*) = (\Sigma + \Sigma_*) \cdot (\mathsf{E} - \Sigma^{-1}\Sigma_*),$$

deren letzte sich sofort als Identität erweist, aus der vorhergehenden wie auch aus der nachfolgenden Gleichung. Aus der Definitionsgleichung (164), $S_* = -S\Sigma_* S$, ergeben sich dann die übrigen der aufgestellten Formeln. Man hat nur zu beachten, daß in einem Produkt wie $(\mathsf{H} + \Sigma_* S)(\mathsf{H} - \Sigma_* S)$ die Faktoren vertauschbar sind, und daß also auch

$$(\mathsf{H} + \Sigma_* S)^{-1}(\mathsf{H} - \Sigma_* S) = (\mathsf{H} - \Sigma_* S)(\mathsf{H} + \Sigma_* S)^{-1}$$

ist. In den Formeln (167) ist dieser Sachverhalt durch den Gebrauch eines gewöhnlichen Bruchstrichs angedeutet.

Es seien nun umgekehrt T und T gegeben, so daß die Gleichungen (168) bestehen. Aus diesen folgt dann $\{\mathsf{T}\} = \{T\}$, während für verschwisterte Formen allgemein $\{\mathsf{T}\} \cdot \{T\} = 1$ ist. Es ist also $\{\mathsf{T}\} = \{T\} = \pm 1$, und da ein analytisches Kontinuum vorliegt, so folgt aus $\{\mathsf{H}\} = \{\mathsf{E}\} = 1$, daß allgemein (auch im komplexen Gebiete) das obere Zeichen gilt. Ist sodann $\{\mathsf{T} + \mathsf{H}\} \neq 0$, so kann man eine Form Σ_* durch die Formel

$$\Sigma_* = (\mathsf{T} + \mathsf{H})^{-1}(\mathsf{T} - \mathsf{H})\Sigma$$

definieren. Es folgt dann

$$(\mathsf{T} + \mathsf{H})^{-1}(\mathsf{T} - \mathsf{H})\Sigma = (\mathsf{T} + \mathsf{H})^{-1}\Sigma(T - \mathsf{E})$$
$$= -(\mathsf{T} + \mathsf{H})^{-1} S^{-1}(T - E) = -(S(\mathsf{T} + \mathsf{H}))^{-1}(T - E)$$
$$= -((T + E)S)^{-1}(T - E) = \Sigma(T + \mathsf{E})^{-1}(T - \mathsf{E}),$$
$$\Sigma_* = \Sigma(T - \mathsf{E})(T + \mathsf{E})^{-1},$$

ferner

$$'\Sigma_* = -\Sigma('\mathsf{T} - \mathsf{E})('\mathsf{T} + \mathsf{E})^{-1}$$
$$= -\Sigma(T^{-1} - \mathsf{E})(T^{-1} + \mathsf{E})^{-1} = -\Sigma(\mathsf{E} - T)(\mathsf{E} + T)^{-1}$$
$$= \Sigma(T - \mathsf{E})(T + \mathsf{E})^{-1},$$
$$'\Sigma_* = \Sigma_*,$$

womit auch der letzte Teil unseres Lehrsatzes begründet ist.

Ersetzt man in den aufgestellten Formeln die Zeichen T und T durch $-\mathsf{T}$ und $-T$, so erhält man eine zweite Parameterdarstellung von automorphen Transformationen der Form Σ, deren Existenzbereich sich nicht ganz mit dem der ersten deckt und insbesondere die Formen $-\mathsf{H}$, $-\mathsf{E}$

einschließt, die die Gleichungen (171) illusorisch machen. Beide Parameterdarstellungen sind möglich dort, wo zugleich

$$\begin{aligned} \{\mathsf{T}+\mathsf{H}\} &= \{T+\mathsf{E}\} \\ \{\mathsf{T}-\mathsf{H}\} &= \{T-\mathsf{E}\} \end{aligned} \tag{173}$$

von Null verschieden sind. Nimmt man an, daß T und T durch die Formeln (167) gegeben sind, und versucht man sodann, mit Hilfe einer Form Σ_{**} (an Stelle von Σ_*) $-\mathsf{T}$ und $-T$ ebenfalls in die Form (167) zu bringen, so ergibt sich

$$\Sigma_{**} = \Sigma\,\Sigma_*^{-1}\Sigma, \quad \{\Sigma_*\} \neq 0. \tag{174}$$

Die letzte Formel enthält also die Bedingung dafür, daß die Nablafunktionen (173) beide nicht Null sind.

Natürlich wird durch das Formenpaar T, T nicht nur die Form Σ automorph transformiert, sondern es gilt dasselbe auch von Σ_*,

$$(\Sigma+\Sigma_*)(\Sigma-\Sigma_*)^{-1}\cdot\Sigma_* = \Sigma_*\cdot(\Sigma-\Sigma_*)^{-1}(\Sigma+\Sigma_*).$$

Es gibt daher noch einen zweiten Satz, der dem aufgestellten ganz analog ist, und von automorphen eigentlichen Transformationen eines Formenpaares Σ, S handelt, für das

$$'\Sigma = \Sigma, \quad 'S = S, \quad \{\Sigma\}, \{S\} \neq 0$$

ist. Ich wünsche eine Wiederholung von Gleichartigem zu vermeiden, und werde also den Fall der Spiegelung an einem Paar von Kreisen aus einem anderen Gesichtspunkt betrachten.

§ 9.

Die automorphen konformen Transformationen von Kreisen und die zugehörigen Spiegelungen.

Es handele sich jetzt um die Spiegelung an einem Kreis, und zwar sogleich um die Spiegelung an der Geraden $\tilde{z} = z$, die Ort der Bilder numerischer Quaternionen ist, also um die involutorische Umlegung

$$\tilde{z} = z', \tag{175}$$

der nach Nr. 112 und Nr. 109 das Formenpaar

$$S_0 = \tilde{x}_2 y_1 - \tilde{x}_1 y_2 = 'S_0, \quad \Sigma_0 = u_2\tilde{v}_1 - u_1\tilde{v}_2 = '\Sigma_0 \tag{176}$$

zugeordnet werden kann.

Verlangen wir, daß diese uneigentlich-konforme Transformation bei einer Transformation der Gruppe Γ_{15} (oder G_{15}) in Ruhe bleibt, so erhalten wir für deren Quaternionen-Koeffizienten a, b, c, d die Gleichungen

177a)
$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{a}\,c &= \tilde{c}\,a \quad , \quad \tilde{b}\,d = \tilde{d}\,b, \\ \tilde{d}\,a - \tilde{b}\,c &= \Delta = \tilde{a}\,d - \tilde{c}\,b, \end{aligned}} \qquad \{\Delta = \tilde{\Delta}\},$$

ie wegen

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}, & -\tilde{b} \\ -\tilde{c}, & \tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}, & -\tilde{b} \\ -\tilde{c}, & \tilde{a} \end{pmatrix}$$

och die ähnlich gebauten und gleichbedeutenden Gleichungen

177b)
$$\boxed{\begin{aligned} a\,\tilde{b} &= b\,\tilde{a} \quad , \quad c\,\tilde{d} = d\,\tilde{c}, \\ a\,\tilde{d} - b\,\tilde{c} &= \Delta = d\,\tilde{a} - c\,\tilde{b} \end{aligned}}$$

ach sich ziehen. (Δ vertritt hier das Zeichen Δ_l, da das entsprechende Δ_r nicht gebraucht wird.)

Wir bestimmen nun zunächst alle Lösungen der Gleichungen (177), ir die c und d nicht beide Teiler der Null sind, was bei Beschränkung uf das reelle Gebiet keine weitere Beschränkung bedeutet. Verstehen wir ann unter $\tilde{q}$ eine Quaternion, die auch nicht Teiler der Null ist, so finden ir mühelos, daß a, b, c, d die Form

178)
$$\boxed{a = a_0 \cdot \tilde{q}, \quad b = b_0 \cdot \tilde{q}, \quad c = c_0 \cdot \tilde{q}, \quad d = d_0 \cdot \tilde{q}}$$

aben müssen, wo a_0, b_0, c_0, d_0 *numerische* Quaternionen bedeuten. Es lgt dann noch

179)
$$\Delta = (a_0 d_0 - b_0 c_0) \cdot \tilde{q}\, q,$$

180)
$$\nabla = \Delta^2,$$

nd, nach Nr. (35), daß

181)
$$a_0 \cdot q = \Delta \cdot \alpha, \quad c_0 \cdot q = \Delta \cdot \gamma, \quad b_0 \cdot q = \Delta \cdot \beta, \quad d_0 \cdot q = \Delta \cdot \delta$$

ird. Die Zusammensetzung der hiermit eingeführten neuen Parameter, on denen a_0, b_0, c_0, d_0 und $\tilde{q}$ (oder q) nur bis auf numerische Faktoren $\varrho, \varrho, \varrho$ und ϱ^{-1} bestimmt sind, kann nach der Regel

182)
$$\boxed{\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0' & b_0' \\ c_0' & d_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0'' & b_0'' \\ c_0'' & d_0'' \end{pmatrix}, \qquad q\,q' = q''}$$

usgeführt werden. Unbeschadet der Allgemeinheit kann dann noch $\Delta = 1$ esetzt werden. Wir erhalten so ein vollkommenes Reziprozitätsverhältnis

zwischen den Systemen a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; die gesuchten Transformationen werden sämtlich darstellbar in der Form

$$(183) \qquad \boxed{\frac{\tilde{q}\,(a_0 z + b_0)}{\tilde{q}\,(c_0 z + d_0)} = z' = \frac{(a_0 z + b_0)\,q}{(c_0 z + d_0)\,q}}.$$

Sie vertauschen untereinander, und zwar projektiv, in allgemeinster Weise die Punkte des gegebenen Kreises, also der Geraden $\tilde{z} = z$, und sie umfassen die Gesamtheit dieser Transformationen der Gruppe Γ_{15}, da man auch schon von der letzten Forderung aus zu den Gleichungen (177) kommt.

Wir sehen:

Die automorphen eigentlich-konformen Transformationen eines irreduzibelen Kreises bilden eine sechsgliedrige analytische Gruppe (eine Gruppe von $\infty^{2\cdot 6}$ Transformationen).

Diese Gruppe Γ_6 enthält zwei invariante dreigliedrige analytische Untergruppen Γ_3^L und Γ_3^R, derart, daß jede Transformation aus der einen mit jeder Transformation der anderen vertauschbar ist. Die eine dieser Gruppen, die wir Γ_3^L nennen, besteht aus allen Transformation von Γ_{15}, die den gegebenen Kreis punktweise in Ruhe lassen. Ihre Transformationen lassen dann auch alle Kugeln durch den reziproken Kreis in Ruhe, und die Kugeln durch den gegebenen Kreis vertauschen sie auf die allgemeinste durch Transformationen von Γ_{15} zu bewirkende Art. Die Punkte des zweiten Kreises werden von diesen Transformationen in allgemeinster Weise projektiv vertauscht. Ebenso verhält sich nach Vertauschung der zwei Kreise die Untergruppe Γ_3^R von Γ_{15}.

Jede Transformation der Gruppe Γ_6 kann auf eine einzige Weise in eine Transformation von Γ_3^L und eine Transformation von Γ_3^R zerlegt werden.

In unserem Beispiel sind die beiden Kreise reell und der eine ist akzessorisch. Die beiden dreigliedrigen Gruppen sind in diesem besonderen Falle

$$(184) \qquad (\Gamma_3^L): \ \boxed{\frac{\tilde{q}\,z\,q}{N(q)} = z'}, \qquad (\Gamma_3^R): \ \boxed{\frac{a_0 z + b_0}{c_0 z + d_0} = z'}.$$

Die Kugeln durch den realen Kreis sind hier Ebenen; die den reziproken Kreis enthaltenden Kugeln liegen in Flachen, die auf der Geraden $z - \tilde{z} = 0$ senkrecht stehen, und haben ihre Mittelpunkte auf dieser Geraden.

Den Formeln (183, 184) entnimmt man noch:

Ist die Gruppe Γ_6 reell, so enthält sie zwei Schichten von (je ∞^6) reellen Transformationen, die den bei reellen Werten von a_0, b_0, c_0, d_0 möglichen Annahmen

$$(185) \qquad a_0 d_0 - b_0 c_0 > 0, \qquad a_0 d_0 - b_0 c_0 < 0$$

entsprechen. Die Gruppe Γ_3^L *hat dann einen einzigen reellen Zug, die Gruppe* Γ_3^R *aber hat, wie* Γ_6 *selbst, ihrer zwei* (165), *d. h. ihre reellen Transformationen sind auf zwei Schichten verteilt.*

Die uneigentlich-konformen Transformationen, die die Punkte eines (irreduziblen) Kreises untereinander vertauschen oder in Ruhe lassen, werden natürlich erhalten, wenn man die Gruppen Γ_6 und Γ_3^L durch die zum Kreis gehörige Spiegelung ($\tilde{z} = z'$ im Beispiel) zu geschichteten Gruppen Γ_6, H_6 und Γ_3^L, H_3^L erweitert. Erweitert man auch die Gruppe Γ_3^R, so wird in einer wohl ohne weiteres verständlichen Bezeichnungsart

$$\Gamma_3^L \Gamma_3^R = \Gamma_6 = \mathsf{H}_3^L \mathsf{H}_3^R, \qquad \Gamma_3^L \mathsf{H}_3^R = \mathsf{H}_6 = \mathsf{H}_3^L \Gamma_3^R,$$

wobei die nach Art von Faktoren zusammengestellten Transformationenschichten vertauschbar sind.

Aus den besprochenen Tatsachen läßt sich nun eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. Den genannten Gruppen entsprechen nämlich, nach den in § 7 angegebenen Regeln, andere, zu ihnen holomorphe Gruppen, die von ihnen, in dem hier angewendeten System von Zeichen, durch Gebrauch der Symbole $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ zu unterscheiden sind. ($\mathfrak{G}_6$, $\mathfrak{G}_3^L$, $\mathfrak{G}_3^R$, usw.) Insbesondere erhalten wir so, nach Nr. (112) und Nr. (109), die T und T zu nennenden Transformationen von $\mathfrak{G}_6$ selbst und die den gleichen Zeichen zuzuordnenden bilinearen Formen, nämlich:

$$(186)\quad (T):\ \begin{aligned} \tilde{q}(a_0 x_1 + b_0 x_2) &= x_1', \\ \tilde{q}(c_0 x_1 + d_0 x_2) &= x_1'; \end{aligned} \qquad (\mathsf{T}):\ \begin{aligned} (u_1 a_0 + u_2 b_0) q &= u_1', \\ (u_1 c_0 + u_2 d_0) q &= u_2', \end{aligned}$$

$$(187)\quad \begin{aligned} T &= \tilde{x}_1 a_0 q \tilde{v}_2 + \tilde{x}_2 b_0 q \tilde{v}_2 - \tilde{x}_1 c_0 q \tilde{v}_1 - \tilde{x}_2 d_0 q \tilde{v}_1, \\ \mathsf{T} &= u_1 a_0 q y_2 + u_2 b_0 q u_2 - u_1 c_0 q y_1 - u_2 d_0 q y_1. \end{aligned} \qquad \{\Delta = 1\}.$$

Infolge hiervon wird für die Transformationen von $\mathfrak{G}_6$ (und im reellen Gebiete auch *nur* für diese):

$$(188)\quad \boxed{\begin{aligned} \tilde{x}_2 y_1 - \tilde{x}_1 y_2 &= \tilde{x}_2' y_1' - \tilde{x}_1' y_2', \\ u_2 \tilde{v}_1 - u_1 \tilde{v}_2 &= u_2' \tilde{v}_1' - u_1' \tilde{v}_2'. \end{aligned}} \quad {}^{39})$$

Man kann nun die veränderlichen Quaternionen $x_k, y_k, \ldots$ *mit den konjugierten Werten von* $u_k, v_k, \ldots$ *identifizieren. Tut man das, so fallen die Unterscheidungen weg, die uns veranlaßt hatten, in unserer Definition*

[39]) Vgl. Nr. 176. Die ähnlich gebildeten Ausdrücke $x_2 \tilde{y}_1 - x_1 \tilde{y}_2$ und $\tilde{u}_2 v_1 - \tilde{u}_1 v_2$ sind nicht Invarianten von $\mathfrak{G}_6$, wohl aber sind es ihre Normen, und ebenso haben den Charakter der Invarianz gegenüber $\mathfrak{G}_6$ die beiden Gleichungen (Gleichungssysteme) $x_2 \tilde{y}_1 - x_1 \tilde{y}_2 = 0$ und $\tilde{u}_2 v_1 - \tilde{u}_1 v_2 = 0$:

$$\begin{aligned} (a_0 d_0 - b_0 c_0) \cdot \tilde{q}(x_2 \tilde{y}_1 - x_1 \tilde{y}_2) q &= x_2' \tilde{y}_1' - x_1' \tilde{y}_2', \\ (a_0 d_0 - b_0 c_0) \cdot \tilde{q}(\tilde{u}_2 v_1 - \tilde{u}_1 v_2) q &= \tilde{u}_2' v_1' - \tilde{u}_1' v_2'. \end{aligned}$$

des „Produkts" oder der „Multiplikation" von zwei bilinearen Quaternionenformen Lücken zu lassen. Aus der in § 7 angegebenen Regel, wonach bei formaler Multiplikation zweier bilinearer Formen die Produkte

$$\tilde{v}_2\tilde{x}_1,\quad \tilde{v}_2\tilde{x}_2,\quad \tilde{v}_1\tilde{x}_1,\quad \tilde{v}_1\tilde{x}_2 \quad \text{und} \quad y_2u_1,\quad y_2u_2,\quad y_1u_1,\quad y_1u_2$$

durch die Zahlen

$$1,\quad 0,\quad 0,\quad -1$$

ersetzt werden sollten, erhält man nun noch eine zweite, der zufolge auch die Produkte

$$y_2\tilde{x}_1,\quad y_2\tilde{x}_2,\quad y_1\tilde{x}_1,\quad y_1\tilde{x}_2 \quad \text{und} \quad \tilde{v}_2u_1,\quad \tilde{v}_2u_2,\quad \tilde{v}_1u_1,\quad \tilde{v}_1u_2$$

so zu behandeln sind. Unsere Tafel (114) wird nun durch die folgende ergänzt:

(189a)

	T_2	S_2	Σ_2	T_2
T_1	·	·	T_3	S_3
S_1	T_3	S_3	·	·
Σ_1	·	·	Σ_3	T_3
T_1	Σ_3	T_3	·	·

(↦)

Das Koeffizientensystem einer jeden der hiermit erklärten weiteren Produktbildungen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3$ ist nach der folgenden Regel zu berechnen:

(190)

$$\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix}_3 \qquad (S_1S_2 = S_3),$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{l} & \tilde{n}\\ \tilde{m} & \tilde{r}\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde{l} & \tilde{n}\\ \tilde{m} & \tilde{r}\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\tilde{l} & \tilde{n}\\ \tilde{m} & \tilde{r}\end{pmatrix}_3 \qquad (\Sigma_1\Sigma_2 = \Sigma_3),$$

$$\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{c}\\ \tilde{b} & \tilde{d}\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{c}\\ \tilde{b} & \tilde{d}\end{pmatrix}_3 \qquad (S_1T_2 = T_3),$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{l} & \tilde{n}\\ \tilde{m} & \tilde{r}\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}_3 \qquad (\Sigma_1\mathsf{T}_2 = \mathsf{T}_3),$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{c}\\ \tilde{b} & \tilde{d}\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde{l} & \tilde{n}\\ \tilde{m} & \tilde{r}\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{c}\\ \tilde{b} & \tilde{d}\end{pmatrix}_3 \qquad (T_1\Sigma_2 = T_3),$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}_3 \qquad (\mathsf{T}_1S_2 = \mathsf{T}_3),$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{c}\\ \tilde{b} & \tilde{d}\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \varrho\end{pmatrix}_3 \qquad (T_1\mathsf{T}_2 = S_3),$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{c}\\ \tilde{b} & \tilde{d}\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}\tilde{l} & \tilde{n}\\ \tilde{m} & \tilde{r}\end{pmatrix}_3 \qquad (\mathsf{T}_1T_2 = \Sigma_3).$$

Die hiermit erklärten weiteren „Produkte" bilinearer Quaternionenformen sind invariant mit ihren Faktoren verbunden gegenüber Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_6$ (*und, im reellen Gebiete, auch nur gegenüber diesen*).

Da nun die Unterscheidung der beiden Einheitsformen E, H (Nr. 118) im Grunde wegfällt, da sie nämlich in diesem jetzigen Zusammenhang *formal* nur noch eine Vervielfältigung von Zeichen darstellt, und für die Unterscheidung der vier Formentypen T, T, S, Σ dasselbe gilt, so hat man hier im Grunde auch nur noch eine einzige Multiplikationsregel bilinearer Quaternionenformen, die der Multiplikationsregel zweireihiger Quaternionenmatrizen parallel läuft. Die für die geometrischen Anwendungen sehr wesentlichen gruppentheoretischen Unterscheidungen fallen dann, wenn man also, sozusagen, von der zuvor entwickelten Theorie nur das Knochengerüst übrig läßt, sämtlich weg. Die nun erklärten weiteren Produktbildungen aber hätten wir auch erklären können, ohne irgendwelche neue Definitionen einzuführen. Sie sind nämlich vollkommen identisch mit den nach unserer früheren Regel (Tafel 114) zu bildenden Produkten

(189b)
$$\begin{array}{ll} T_1 S_0 \Sigma_2 = T_3, & T_1 S_0 \mathsf{T}_2 = S_3, \\ S_1 \Sigma_0 T_2 = T_3, & S_1 \Sigma_0 S_2 = S_3, \\ \Sigma_1 S_0 \Sigma_2 = \Sigma_3, & \Sigma_1 S_0 \mathsf{T}_2 = \mathsf{T}_3, \\ \mathsf{T}_1 \Sigma_0 T_2 = \Sigma_3, & \mathsf{T}_1 \Sigma_0 S_2 = \mathsf{T}_3 : \end{array}$$

Die Tafel (189a) entsteht aus der Tafel (189b) einfach dadurch, daß man die (in Nr. 176 eingeführten) Zeichen S_0, Σ_0 unterdrückt.

Wir sehen hiermit nicht nur, daß die Rechnungsmethode, die wir im Anschluß an die Tafel (114) dargelegt hatten, *trotz der in dieser Tafel enthaltenen Lücken* schon ebensoviel leistet, wie ihre nunmehr hinzugefügte Ergänzung, sondern auch, *daß diese Ergänzung selbst nur eine unter unendlich vielen gruppentheoretisch gleichberechtigten Ergänzungen ist.* In der Tat wird sich an jedes Paar reziproker Formen, das den symbolischen Gleichungen

$$'S = S, \qquad '\Sigma = \Sigma$$

genügt, eine vollkommen gleichberechtigte Ergänzung jener ersten Tafel anschließen lassen[40]). Wir würden auch noch von der in § 8 angestellten Untersuchung ausgehend ein analoges System untereinander gleichberechtigter Ergänzungen vornehmen können.

Die *automorphen Transformationen einer Involution* sollen der Kürze halber übergangen werden. Man kann sie in Beispielen wie $z + z' = 0$

[40]) Ähnliches gilt natürlich auch von der Theorie der gewöhnlichen bilinearen Formen. Siehe das zitierte Lehrbuch der Invariantentheorie, in dem die Theorie der orthogonalen Transformationen ihrer Sonderstellung entkleidet worden ist.

oder $zz' - 1 = 0$ und $zz' + 1 = 0$ ohne weiteres hinschreiben. Auf eine mit dieser Transformationsgruppe zusammenhängende Frage werden wir später zurückkommen (§ 10).

Daß im komplexen Gebiete die automorphen konformen Transformationen einer der betrachteten Spiegelungen *zweimal* zwei Schichten von je $\infty^{2 \cdot 6}$ Transformationen umfassen, ist klar. Im Beispiel der Spiegelung $\tilde{z} = z'$ ist der eine der zugehörigen reziproken Kreise die z_0-Achse, der andere ist akzessorisch. Um die (natürlich imaginären) Transformationen zu finden, die beide Kreise vertauschen (und also ebenfalls mit der Transformation $\tilde{z} = z'$ vertauschbar sind), verstehe man unter p, q, r, s vier singuläre Quaternionen (Teiler der Null), die durch die Gleichungen $p\tilde{q} = 0$, $\tilde{r}s = 0$, also durch die Gleichungen

$$p\tilde{q} = 0, \quad q\tilde{p} = 0, \quad \tilde{r}s = 0, \quad \tilde{s}r = 0,$$
$$\tilde{p}q + \tilde{q}p = 0, \quad r\tilde{s} + s\tilde{r} = 0$$

verbunden und so beschaffen sind, daß

$$\Delta = \tilde{p}q\, s\tilde{r} + r\tilde{s}\, \tilde{q}p$$

von Null verschieden ausfällt. Es wird dann jede eigentlich-konforme Transformation, die die beiden reziproken Kreise miteinander vertauscht, in der Form

[7] $$\boxed{\frac{prz + qr}{psz + qs} = z' = \frac{z\tilde{r}\tilde{p} + \tilde{r}\tilde{q}}{z\tilde{s}\tilde{p} + \tilde{s}\tilde{q}}}$$

darstellbar, und zwar auf ∞^4 Arten. Wenn, wie früher, die Koeffizienten des Ausdrucks links a, b, c, d genannt werden, so folgt dann

$$\tilde{a}c = \tilde{c}a = 0, \quad \tilde{b}d = \tilde{d}b = 0,$$
$$\tilde{d}a - \tilde{b}c = \Delta, \quad \tilde{a}d - \tilde{c}b = \Delta,$$
$$a\tilde{b} = b\tilde{a} = 0, \quad c\tilde{d} = d\tilde{c} = 0,$$
$$a\tilde{d} - b\tilde{c} = \Delta, \quad d\tilde{a} - c\tilde{b} = \Delta$$

(vgl. Nr. 177, a, b) und

$$\boxed{\nabla = -\Delta^2}$$

(vgl. Nr. 180), ferner, nach Nr. 35,

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \Delta \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Hier sind also alle Koeffizienten a, b, c, d von Null verschieden *und Teiler der Null*. Die singulären Stellen einer jeden der Zuordnungen $z \to z'$ und $z' \to z$ erfüllen (wie natürlich in jedem Falle, in dem es singuläre Stellen gibt) eine singuläre Sphäre. In unserem Beispiel sind beide Sphären Flache durch die z_0-Achse. Die auf dieser gelegenen singulären Stellen sind nicht beweglich, d. h. sie sind unabhängig von der Auswahl der betrachteten Transformation.

§ 10.

Verschiedene Ergänzungen.

Nachdem wir nun die involutorischen konformen Transformationen im Möbiusschen Kontinuum R_4 erörtert haben, und einiges, das damit zusammenhängt, wollen wir noch einen Blick werfen auf einen sogenannten allgemeinen Fall, der übrigens genau zu behandeln sein wird: Eine einigermaßen erschöpfende Untersuchung der Möbiusschen Transformationen ist eine Aufgabe, die wir ihres Umfangs wegen auf sich beruhen lassen. Wir wollen auch den Rechnungsapparat, der ebenfalls schon ziemlich umfangreich werden müßte, zur Seite lassen, und uns auf die Darlegung einiger qualitativer (im engeren Sinne sogenannter geometrischer) Ergebnisse beschränken.

Wir denken uns die charakteristische Gleichung einer automorphen Kollineation der Mannigfaltigkeit M_4^2 gebildet (§ 4). Wir schließen sodann besondere Fälle (darunter alle involutorischen Transformationen) durch die Annahme aus, daß die Diskriminante dieser Gleichung sechsten Grades von Null verschieden ist. Dann wird es sechs und nicht mehr Punkte des Raumes R_5 geben, die bei der zu untersuchenden Kollineation in Ruhe bleiben. Ein einzelner dieser *Inzidenzpunkte* wird dann entweder auf der M_4^2 liegen oder nicht. Punkte dieser zweiten Art kann es nicht mehr als zwei geben. Gäbe es nämlich ihrer wenigstens drei, so müßten entweder unendlich viele Punkte in Ruhe bleiben, oder die Punkte der Verbindungslinie von *je zweien* der drei Punkte würden involutorisch gepaart werden. Das erste verstößt gegen unsere Voraussetzung, das zweite aber wird sofort als unmöglich erkannt. Ferner sieht man, daß keine drei der sechs Punkte auf einem *irreduzibelen* ebenen Schnitt der M_4^2 liegen können — da sonst dieser Schnitt punktweise in Ruhe bleiben müßte — und ebenso, daß die sechs Punkte linear-unabhängig sind, daß also keine drei in einer Geraden, keine vier in einer Ebene liegen, usw.

Nehmen wir zuerst an, daß die sechs Inzidenzpunkte alle auf der M_4^2 liegen! Dann müssen sie nach dem Gesagten auf drei Paare, p_1, p_2; q_1, q_2; r_1, r_2 verteilt sein. Die drei Geraden $p_1 p_2$, $q_1 q_2$, $r_1 r_2$ liegen nicht auf der M_4^2, alle anderen geraden Verbindungslinien von zweien der sechs Punkte gehören der M_4^2 an, und ebenso die acht Ebenen $p_i q_j r_k$. Durch jede der zuletzt genannten 12 Geraden gehen zwei solche Ebenen, von denen daher die eine der einen, die andere der andern Schar von $\infty^{2\cdot 3}$ Ebenen angehören muß, die auf der M_4^2 liegen. Daher bleiben beide Scharen von je $\infty^{2\cdot 3}$ Ebenen in Ruhe, es handelt sich um eine *eigentliche* Kollineation. Von den acht Ebenen aber werden

$$p_1 q_1 r_1, \quad p_1 q_2 r_2, \quad p_2 q_1 r_2, \quad p_2 q_2 r_1$$

zur einen Schar gehören, und

$$p_2 q_2 r_2, \quad p_2 q_1 r_1, \quad p_1 q_2 r_1, \quad p_1 q_1 r_2$$

zur anderen. Daher können die sechs Inzidenzpunkte auf zwei Weisen aufgefaßt werden als das vollständige Schnittpunktsystem von vier (gleichartigen) Ebenen, die auf der M_4^2 verlaufen; solche vier Ebenen sind dann insofern nicht ganz beliebig, als ihre Schnittpunkte linear-unabhängig sein müssen; — übrigens sind sie, wie sich zeigen läßt, *nur* durch diese Besonderheit spezialisiert[41]).

Ferner ergibt sich, daß die drei dreidimensionalen Räume

$$q_1 q_2 r_1 r_2, \; r_1 r_2 p_1 p_2, \; p_1 p_2 q_1 q_2$$

der Reihe nach polar sind zu den Geraden

$$p_1 p_2, \; q_1 q_2, \; r_1 r_2,$$

oder daß alle Punkte irgendeiner dieser drei Geraden konjugiert sind zu allen Punkten jeder der beiden anderen in bezug auf die M_4^2.[42])

Ist die betrachtete Kollineation reell, so müssen in jedem der beiden Systeme von vier Ebenen zwei von ihnen konjugiert-imaginär sein, und ebenso die zwei anderen. Es können z. B. $p_1 q_1 r_1$ und $p_1 q_2 r_2$ konjugiert-imaginär sein, und dann sind es auch $p_2 q_1 r_2$ und $p_2 q_2 r_1$. p_1 und p_2 sind dann reell. Immer besteht also dann eines unter den drei Punktepaaren aus reellen Punkten.

Die Untersuchung des zweiten Falles, in dem etwa p_1 und p_2 der M_4^2 nicht angehören, läßt sich auf die des ersten zurückführen. Wir setzen die zu untersuchende Kollineation zusammen mit der Spiegelung, die etwa durch den Punkt p_1 und seinen Polar-R_4 bestimmt wird. Dieser Polar-R_4 geht durch die Punkte p_2, q_1, q_2, r_1, r_2. Es entsteht eine automorphe Kollineation der M_4^2, bei der die Punkte q_1, q_2, r_1, r_2 und außerdem *alle* Punkte der Geraden p_1, p_2 Inzidenzpunkte sind. Diese Kollineation gehört zwar nicht zu den zuvor beschriebenen; doch ist sie aus den gleichen Gründen eigentlich wie diese (von denen sie einen Grenzfall darstellt). Nennen wir p_1', p_2' die beiden Schnittpunkte der M_4^2 mit der Geraden $p_1 p_2$, so bilden p_1' und p_2' zusammen mit q_1, q_2, r_1, r_2 eine Figur

---

[41]) Eine lineare Abhängigkeit zwischen ihnen würde zur Folge haben, daß alle sechs Schnittpunkte von je zweien in derselben Ebene der anderen Art liegen.

[42]) Aus dem Gesagten folgt noch, daß die Galoissche Gruppe der betrachteten Gleichung sechsten Grades im allgemeinen und ungünstigsten Falle (dann also, wenn nicht noch ein weiterer Affekt vorhanden ist) den Grad 24 und die Struktur der sogenannten Oktaedergruppe hat. Im Falle der eigentlichen automorphen Kollineation einer M_4^2, deren beide Scharen von Ebenen nicht rational-getrennt sind, hat die Galoissche Gruppe der charakteristischen Gleichung den Grad $2 \cdot 24$.

der zuvor beschriebenen Art. Die gegebene Kollineation ist *uneigentlich*, ebenso wie die benutzte Spiegelung; sie vertauscht die Ebenen

$$p_1' q_1 r_1,\ p_1' q_2 r_2,\ p_2' q_1 r_2,\ p_2' q_2 r_1$$

der einen Art mit den Ebenen

$$p_2' q_2 r_2,\ p_2' q_1 r_1,\ p_1' q_2 r_1,\ p_1' q_1 r_2$$

der anderen Art. Die Punkte der Geraden $p_1' p_2'$ vertauscht sie involutorisch, aber so, daß nicht p_1' und p_2, sondern die zueinander konjugierten Punkte p_1 und p_2 Inzidenzpunkte sind[43]). Ist die vorgelegte Kollineation reell, so liegen noch zwei Möglichkeiten vor: Das Punktepaar p_1', p_2' kann aus konjugiert-imaginären oder aus reellen Punkten bestehen (p_1, p_2 sind in beiden Fällen reell).

Wir heben zunächst hervor:

Im sphärischen Kontinuum M_4^2 *gibt es eine von zwölf (komplexen) Konstanten abhängige Figur von* $3 \cdot 2$ *Punkten, die auf zwei Arten als vollständiges Schnittpunktsystem von vier auf* M_4^2 *gelegenen Ebenen aufgefaßt werden kann. Je zwei dieser Punktepaare bestimmen eine Kugel, die reziprok ist zu dem dritten Paar.*

Ist die beschriebene Figur reell, so ist eines der drei Punktepaare real, die beiden anderen sind ideal, und umgekehrt verhalten sich dann natürlich die zu diesen Paaren reziproken Kugeln.

Wir nennen nun eine Kollineation im Raume R_5, und insbesondere eine automorphe Kollineation von M_4^2 dann *singulär*, wenn ihre charakteristische Gleichung mehrfach zählende Wurzeln hat, und ebenso nennen wir *singulär* die zugehörige konforme Transformation im Kontinuum M_4^2. Es gilt dann der Satz:

I. *Die sechs Inzidenzpunkte einer nicht-singulären eigentlich-konformen Transformation im Kontinuum* M_4^2 *bilden eine Figur der beschriebenen Art. Jede solche Transformation läßt also drei nicht-singuläre Kugeln in Ruhe, deren Punkte sie eigentlich-konform untereinander vertauscht*[44]). *Je zwei dieser Kugeln, von denen im Falle einer reellen Transformation*

---

[43]) Die charakteristische Gleichung ist nach dem Vorgetragenen in diesem Falle reduzibel: Die Bestimmung von p_1 und p_2 hängt ab von der Auflösung einer Gleichung zweiten Grades, während die Bestimmung von q_1, q_2, r_1, r_2 im allgemeinen und ungünstigsten Falle das Ausziehen von drei Quadratwurzeln verlangt.

[44]) Nämlich so, daß die beiden Scharen von Geraden auf einer solchen Kugel einzeln in Ruhe bleiben. — Invariante nicht-singuläre M_1^2 oder M_3^2 gibt es nicht.

zwei real sind und eine ideal, schneiden einander orthogonal in einem der Paare von Inzidenzpunkten[45]).

Diese Wurzeln sind also proportional zu drei Paaren reziproker Größen, von denen zwei Paare aus (konjugiert-) imaginären Größen bestehen und den absoluten Betrag Eins haben. Sie sind auch proportional zu den sechs Produkten aus den Wurzeln der einen wie der anderen von zwei zueinander reziproken Gleichungen 4. Grades

$$\begin{Bmatrix} a-\lambda, & b \\ c, & d-\lambda \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} \alpha-\varrho, & \gamma \\ \beta, & \delta-\varrho \end{Bmatrix} = 0,$$

deren jede die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{Bmatrix} a-\lambda, & b \\ c, & d-\lambda \end{Bmatrix}^2 = 0, \quad \begin{Bmatrix} \alpha-\varrho, & \gamma \\ \beta, & \delta-\varrho \end{Bmatrix}^2 = 0$$

einer der Transformationen

$$\begin{aligned} a x_1 + b x_2 &= x_1', & u_1\alpha + u_2\beta &= u_1', \\ c x_1 + d x_2 &= x_2', & u_1\gamma + u_2\delta &= u_2' \end{aligned}$$

liefert.

II. *Eine nicht-singuläre uneigentlich-konforme Transformation hat im Kontinuum* M_4^2 *vier Inzidenzpunkte und außerdem werden von ihr zwei Punkte von* M_4^2 *miteinander vertauscht („Wechselpunkte"). Alle sechs Punkte bilden zusammen wiederum eine der beschriebenen Figuren.*

In dem durch die Wechselpunkte bestimmten Büschel gibt es zwei zueinander orthogonale Sphären, die einzeln in Ruhe bleiben und sich in der durch die Inzidenzpunkte bestimmten Kugel durchdringen. Die Punkte dieser Kugel werden eigentlich-konform untereinander vertauscht. Die Punkte der beiden Kugeln aber, die die Wechselpunkte mit einem Paar von Inzidenzpunkten verbinden, werden uneigentlich-konform untereinander vertauscht. Auf jeder dieser beiden letzten Kugeln liegen schließlich zwei zueinander orthogonale Kreise, die ebenfalls bei der Transformation in Ruhe bleiben. Sie werden ausgeschnitten durch die beiden invarianten Sphären und sind auf drei Arten zu Paaren angeordnet: Erstens durch ihre Verteilung auf zwei Kugeln, zweitens als reziproke Figuren, und drittens dadurch, daß zweimal zwei ein Paar der Inzidenzpunkte enthalten[46]).

[45]) Man kann die reellen Inzidenzpunkte in die Stellen $0, \infty$ verlegen und dann noch erreichen, daß die zwei realen Kugeln die Ebenen $z_2 = z_3 = 0$ und $z_1 = z_2 = 0$ werden. Die Form der Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist

$$r e^{+\varphi}; \quad r e^{+i\chi}; \quad r e^{\pm i\psi}.$$

$$\{r, \varphi, \psi, \chi \text{ reell}; \quad \varphi \neq 0; \quad 2\chi, 2\psi, \chi - \psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}.$$

[46]) Die im Texte genannten beiden M_3^2, die drei M_2^2 und die vier M_2^1 sind die einzigen nicht singulären M_3^2, M_2^2, M_1^2, die bei der Transformation in Ruhe bleiben.

Im reellen Gebiete sind dann noch zwei Fälle zu unterscheiden[47]).

III a. *Sind, bei einer reellen uneigentlichen und nicht-singulären Transformation, die beiden Wechselpunkte imaginär und also zwei der Inzidenzpunkte reell, so sind die invarianten Sphären beide real. Eine wird eigentlich- und eine uneigentlich-konform transformiert*[48]). *Von den invarianten Kugeln sind zwei real; sie treffen sich (orthogonal) in den reellen Inzidenzpunkten. Ferner sind zwei der invarianten Kreise real; beide liegen auf der einen der invarianten realen Kugeln und enthalten deren Schnittpunkte mit den anderen. Die reellen Punkte dieser Kreise werden also durch je eine hyperbolische Projektivität transformiert (und zwar im einen Falle gleichsinnig, im anderen ungleichsinnig)*[49]).

III b. *Sind, bei einer reellen uneigentlichen und nicht-singulären Transformation, die beiden Wechselpunkte reell, sind also alle Inzidenzpunkte imaginär, so ist nur eine der invarianten Sphären real. Sie wird eigentlich-konform transformiert. Zwei der invarianten Kugeln sind real. Sie treffen sich (orthogonal) in den beiden Wechselpunkten. Jede trägt einen invarianten realen Kreis, und jeder dieser Kreise enthält ein ideales Paar von Inzidenzpunkten. Die reellen Punkte beider Kreise werden also durch eine elliptische Projektivität (mithin gleichsinnig) transformiert*[50]).

In der projektiven Geometrie kann man irgend $m+1$ linear-unabhängige Punkte eines Gebietes m-ter Stufe irgendwelchen anderen derart in einer Reihe nach zuordnen; dadurch ist dann gerade eine projektive Zuordnung der beiden Gebiete bestimmt, die die gegebene Zuordnung der Punktfiguren hervorruft. Hierzu gibt es in der Geometrie der Möbiusschen Transformationen (bei beliebiger Dimensionenzahl) einen analogen

[47]) Eine hiermit unvereinbare Angabe der Mathematischen Enzyklopädie (Cartan, I. 453) beruht auf offenbarem Versehen.

[48]) Man beachte, hier, und ebenso in der Formulierung III b, daß bei realen Mannigfaltigkeiten M_m^2 von ungerader Zahl m der reellen Dimensionen die Unterscheidung eigentlich — uneigentlich sich auf das reelle Gebiet bezieht.

[49]) Man kann wie zuvor verfahren [Anmerkung [45])]. Die Form der Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist nunmehr

$$re^{\pm\varphi};\quad \pm r;\quad re^{\pm i\psi}$$

$$\{r, \varphi, \psi \text{ reell};\ \varphi \neq 0;\ 2\psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}.$$

[50]) Die Wechselpunkte liegen zu diesen Kreisen invers (spiegelbildlich). Man kann nunmehr, vermöge einer reellen Transformation, die Wechselpunkte in die Zellen $0, \infty$ verlegen und somit wie zuvor verfahren [Anmerkungen [45]), [49])].

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung haben hier die Form

$$\pm r;\quad re^{\pm i\chi};\quad re^{\pm i\psi}$$

$$\{r, \chi, \psi \text{ reell};\ 2\chi, 2\psi, \chi-\psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}.$$

Satz, der bei Beschränkung auf reelle und insbesondere *reale* Figuren auch noch einen einigermaßen einfachen Wortlaut hat. *Nur* solche Figuren sollen hier betrachtet werden.

Die zunächst liegenden, gewöhnlichen Doppelverhältnissen der Form nach analogen, Quaternionenausdrücke allerdings erweisen sich als im allgemeinen nicht-invariant auch nur gegenüber Transformationen der Gruppe Γ_{15}. Sind x, y, z, t irgend vier Quaternionen, oder also Punkte in unserem Möbiusschen Kontinuum, so liefert die Formel (46) nur die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(ct+d)\cdot\{(t-x)^{-1}(z-x)(z-y)^{-1}(t-y)\}\cdot(ct+d)^{-1} = \\ &\quad = (t'-x')^{-1}(z'-x')(z'-y')^{-1}(t'-y'), \\ &(z\gamma+\delta)^{-1}\cdot\{(z-x)(t-x)^{-1}(t-y)(z-y)^{-1}\}\cdot(z\gamma+\delta) = \\ &\quad = (z'-x')(t'-x')^{-1}(t'-y')(z'-y')^{-1}. \end{aligned} \tag{191}$$

Man sieht, daß gegenüber eigentlichen Möbiusschen Transformationen die hier gebildeten Ausdrücke nur dann die Invarianteneigenschaft haben können, wenn sie numerisch sind. Verlegt man etwa die drei Punkte x, y, z auf die Gerade $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, so muß dann auch t in diese Gerade fallen. Es ergibt sich:

Die Ausdrücke (191) *haben dann und nur dann die Invarianteneigenschaft (gegenüber eigentlichen und uneigentlichen Möbiusschen Transformationen), wenn die vier Punkte x, y, z, t derselben Kreislinie angehören. Sie reduzieren sich dann beide auf dasselbe gewöhnliche Doppelverhältnis. Daher sagen die Gleichungen*

$$\frac{z-p}{z-q}+\frac{z'-p}{z'-q}=0, \qquad \frac{z-p}{z-q}+\frac{z'-p}{z'-q}=0 \tag{192}$$

beide unmittelbar aus, daß die Punktepaare z, z' einer Involution zu deren Inzidenzpunkten p, q harmonisch liegen (vgl. Nr. 80).

Anders steht es offenbar mit Doppelverhältnissen, die man aus den Normen der Differenzen $t - x$ usw. bilden kann, also mit Doppelquotienten des Typus

$$[x, y, z, t] = \frac{N(z-x)\cdot N(t-y)}{N(t-x)\cdot N(z-y)}, \tag{193}$$

deren sich aus vier Punkten zwei voneinander unabhängige bilden lassen. Sie sind absolute Invarianten der Gruppe Γ_{15}, H_{15}, und stehen in einem einfachen Zusammenhang mit den Graßmannschen Doppelverhältnissen der projektiven Liniengeometrie, und auch, wie diese letzten, mit gewöhnlichen Doppelverhältnissen. Ich habe sie schon früher eingehend untersucht, wenn auch damals ohne die (nebensächliche) Beziehung zur Quaternionentheorie. Ich verweise auf meine Abhandlung darüber[51]) und

[51]) Leipziger Berichte 1896, S. 200.

beschränke mich hier darauf, einige Lehrsätze zusammenzustellen, deren Ableitung keine Schwierigkeit bietet.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß vier eigentliche reelle Punkte x, y, z, t einer Kreislinie angehören, besteht darin, daß die Determinante

$$(194)\qquad \begin{vmatrix} 0 & N(y-x) & N(z-x) & N(t-x) \\ N(y-x) & 0 & N(z-y) & N(t-y) \\ N(z-x) & N(z-y) & 0 & N(t-z) \\ N(t-x) & N(t-y) & N(t-z) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\sqrt{N(y-z)\,N(t-x)} + \sqrt{N(z-x)\,N(t-y)} + \sqrt{N(x-y)\,N(t-z)}\}$$
$$\cdot\{\sqrt{*} - \sqrt{*} - \sqrt{*}\}\cdot\{-\sqrt{*} + \sqrt{*} - \sqrt{*}\}\cdot\{-\sqrt{*} - \sqrt{*} + \sqrt{*}\}$$

den Wert Null hat[52]).

Ist für zwei Punktquadrupel x, y, z, t und x', y', z', t' diese Determinante von Null verschieden, so ist für ihre Äquivalenz (gegenüber Transformationen von Γ_{15}, H_{15}) notwendig und hinreichend die Gleichheit der aus beiden (nach Anleitung der Formel (193)) zu bildenden Systeme von Doppelverhältnissen.

Der Fall von zweimal vier reellen Punkten in Kreislinien ist schon erledigt durch die an die Formel (192) geknüpfte Bemerkung.

Mit Hilfe von Determinanten, die nach Analogie der Determinante (194) gebildet sind, sich aber, in den höheren Fällen, nicht mehr in Produkte zerlegen lassen, entscheidet man weitergehende Fragen. Insbesondere liefert das Verschwinden einer nach Analogie von (194) aus fünf oder sechs reellen Punkten gebildeten Determinante die Bedingung dafür, daß diese Punkte in einer Kugel oder in einer Sphäre enthalten sind. Sind zweimal fünf reelle und einander bestimmt zugeordnete Punkte nicht in Kugeln enthalten, und sind außerdem alle Doppelverhältnisse des Typus (193) einander gleich, die man aus je vier Punkten der einen oder anderen Figur bilden kann, so läßt sich die erste Figur in die zweite gerade durch *eine* Transformation der Gruppe Γ_{15}, und ebenso durch *eine* Transformation aus der Schar H_{15} derart überführen, daß entsprechende Punkte zur Deckung kommen[53]). Handelt es sich um sechs Punkte, die nicht in einer Sphäre liegen, so hat man, bei Gleichheit entsprechender Doppelverhältnisse, die Möglichkeit einer Überführung durch eine Trans-

---

[52]) Der leicht zu erledigende Fall, in dem einer der vier Punkte uneigentlich wird (etwa $t = \infty$), darf hier wohl übergangen werden. Ebenso in den folgenden Sätzen.

[53]) Vgl. H. Mohrmann, Math. Ann. 79 (1918) S. 180, wo — im Fall der Liniengeometrie — die übrigen Arten der Äquivalenz solcher Quadrupel untersucht werden.

formation aus Γ_{15} *oder* aus H_{15}. Beide Fälle sind nach § 4 unschwer zu unterscheiden. Ferner gehört in diesen Zusammenhang der folgende mühelos zu begründende Lehrsatz:

Wird in einem sphärischen (Möbiusschen) Kontinuum M_n^2 von n komplexen Dimensionen ein anderes M_{n-1}^2 in vorgeschriebener Weise konform (und zwar in den Fällen $n-1=1, 2$ durch eine Möbiussche Transformation) transformiert, so läßt sich diese Transformation auf eine einzige Weise als eigentlich-(uneigentlich-)konforme Transformation in das Kontinuum M_n^2 hinein fortsetzen.

Eine naheliegende Ergänzung hierzu ist:

„Ist $n-1 > m \geqq 1$, so läßt sich eine vorgeschriebene konforme (Möbiussche) Transformation eines sphärischen (Möbiusschen) Kontinuums M_m^2, das in dem Kontinuum M_n^2 liegt, auf zwei Arten als konforme Transformation so in das Kontinuum M_n^2 hinein fortsetzen, daß alle in M_n^2 enthaltenen und M_m^2 enthaltenden sphärischen (Möbiusschen) Kontinua *einzeln* in Reihe bleiben."

Man beweist das sehr einfach, wenn man beide Möbiussche Kontinua als eben annimmt, oder besser noch mit Hilfe der Darstellung von M_n^2 in der Form

$$z_a^2 - z_0^2 - \ldots - z_{m-1}^2 - \ldots - z_{n-1}^2 - z_n^2 = 0.$$

Es läßt sich auch genau angeben, unter welchen Umständen (im komplexen Gebiete für gerade Werte, im reellen für beliebige Werte von n) die erhaltene Transformation von M_n^2 eigentlich- oder uneigentlich-konform ist. Wir wollen aber den letzten Satz sogleich durch ein Beispiel erläutern, das ihn mit der Quaternionentheorie in Verbindung bringt, und wohl ein größeres Interesse hat, als der Satz selbst.

Es seien vorgelegt eine lineare und eine quasi-lineare Transformation einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen $z = x + iy$

$$\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{l\bar{z}+m}{n\bar{z}+r} = z'. \tag{195}$$

Diese Transformationen lassen sich dann ohne weiteres in das Quaternionenkontinuum fortsetzen, einfach dadurch, daß man die gemeine komplexe Zahl $x + iy$ mit einer reellen Quaternion der Form $(x, y, 0, 0)$ identifiziert, hinterher aber diese spezielle Quaternion durch eine beliebige Quaternion (z_0, z_1, z_2, z_3) ersetzt. So entstehen z. B. aus der ersten Formel (195) zwei Transformationen *von Quaternionen*

$$\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{za+b}{zc+d} = z',$$

deren jede *sieben* wesentliche Parameter enthält. Diese beiden Transformationen sind in der Regel voneinander verschieden, sie gehören aber, wie eine einfache Rechnung zeigt, derselben siebengliedrigen kontinuierlichen Gruppe an, die die linearen Räume $\sigma z_2 + \tau z_3 = 0$ *eingliedrig* untereinander vertauscht. Wenn jedoch die hier bis auf einen gewöhnlichen komplexen Faktor bestimmten Konstanten der Formel (195) von vornherein so gewählt werden, daß ihre Determinante reell ausfällt, so werden die beiden Quaternionentransformationen identisch und sie lassen zugleich die sämtlichen linearen Räume $\sigma z_2 + \tau z_3 = 0$ *einzeln* in Ruhe. Wählt man die Determinante so, daß sie überdies positiv wird, so hat man damit die sechsgliedrige Gruppe der eigentlichen Möbiusschen Transformationen der gewöhnlichen komplexen Veränderlichen z *eindeutig*, und zwar als sechsgliedrige invariante Untergruppe der genannten siebengliedrigen Gruppe, in das Quaternionenkontinuum hinein fortgesetzt. Die fortgesetzte Transformation gehört zu den eigentlichen, und sie ist auch eine eigentliche Transformation für jeden einzelnen der Räume $\sigma x_2 + \tau x_3 = 0$. Entsprechendes gilt von der zweiten Formel (195). Es ist bewiesen:

Die Möbiusschen Transformationen

$$\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{l\bar{z}+m}{n\bar{z}+r} = z' \tag{195}$$

der Gaußschen Ebene $z_2 = z_3 = 0$ lassen sich jede auf eine einzige Weise zu Quaternionentransformationen derart erweitern, daß die erweiterte Transformation jeden einzelnen der linearen Räume in Ruhe läßt, die die Gaußsche Ebene enthalten, und daß sie außerdem für jeden dieser Räume eigentlich-konform wird im ersten und uneigentlich-konform im zweiten Falle. Man wähle dazu die Transformationskonstanten so, daß ihre Determinanten positiv (z. B. gleich der Einheit) werden. Die gesuchten Transformationen sind dann

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= z' = \frac{za+b}{zc+d}, \\ \frac{l\tilde{z}+m}{n\tilde{z}+r} &= z' = \frac{\tilde{z}l+m}{\tilde{z}n+r}. \end{aligned} \tag{196}$$ [54])

Die Nablafunktionen, die zu den so dargestellten Quaternionentransformationen gehören, sind

---

[54]) Während also in den Formeln (195) z eine gewöhnliche komplexe Veränderliche ($= x + iy = z_0 + iz_1$) ist, bedeutet dasselbe Zeichen in (196) irgendeine Quaternion, nicht nur eine solche der Form $(x, y, 0, 0)$. Entsprechend unterscheiden sich die Zeichen $\bar{z}\,(= x - iy = z_0 - iz_1)$ und $\tilde{z}\,(= z_0, -z_1, -x_2, -z_3)$. Dagegen ist in den Formeln (195) $a = (a_0, a_1, 0, 0)$ usw., wenn zuvor $a = a_0 + ia_1$ war.

$$\begin{Bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\,c \\ b\,d \end{Bmatrix} = (ad-bc)^2,$$
$$\begin{Bmatrix} l\,m \\ n\,r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l\,n \\ m\,r \end{Bmatrix} = (lr-mn)^2. \tag{197}$$

In dem letzten Lehrsatz steckt schließlich noch der folgende speziellere Satz, bei dessen Formulierung die Sprache der Quaternionentheorie keine besonderen Vorteile mehr bietet:

Die Transformationen

$$\frac{a(z_0+iz_1)+b}{c(z_0+iz_1)+d} = z_0' + iz_1',$$
$$\frac{l(z_0-iz_1)+m}{n(z_0-iz_1)+r} = z_0' + iz_1' \tag{198}$$

einer (gewöhnlichen) komplexen Veränderlichen lassen sich auf eine einzige Weise in das Möbiussche Kontinuum (z_0, z_1, z_2) hinein als konforme Transformationen so fortsetzen, daß der Halbraum $z_2 > 0$ als Ganzes in Ruhe bleibt. Man stelle nämlich die gegebenen Transformationen so dar, daß die zugehörigen Determinanten $ad - bc$ und $lr - mn$ reell und zwar positiv werden. Die gesuchte Transformation ist dann im ersten Falle[55])

$$\frac{\{a(z_0+iz_1)+b\}\{\bar{c}(z_0-iz_1)+\bar{d}\}+a\bar{c}\cdot z_2^2}{\{c(z_0+iz_1)+d\}\{\bar{c}(z_0-iz_1)+\bar{d}\}+c\bar{c}\cdot z_2^2} = z_0' + iz_1',$$
$$\frac{(ad-bc)\cdot z_2}{\{c(z_0+iz_1)+d\}\{\bar{c}(z_0-iz_1)+\bar{d}\}+c\bar{c}\cdot z_2^2} = z_2', \tag{199}$$

und im zweiten

$$\frac{\{l(z_0-iz_1)+m\}\{\bar{n}(z_0+iz_1)+\bar{r}\}+d\bar{n}\cdot z_2^2}{\{n(z_0-iz_1)+r\}\{\bar{n}(z_0+iz_1)+\bar{r}\}+n\bar{n}\cdot z_2^2} = z_0' + iz_1',$$
$$\frac{(lr-mn)\cdot z_2}{\{n(z_0-iz_1)+r\}\{\bar{n}(z_0+iz_1)+r\}+n\bar{n}\cdot z_2^2} = z_2'. \tag{200}$$

Trennt man in diesen Formeln, die quadratische Glieder nur in der Verbindung $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2$ enthalten, die reellen und die imaginären Bestandteile, so kann man die gefundenen Transformationen analytisch ins komplexe Gebiet des Kontinuums (z_0, z_1, z_2) fortsetzen. Sie bleiben aber dann getrennt, wiewohl die Gesamtgruppe der $\infty^{2\cdot 10}$ konformen Transformationen der komplexen Veränderlichen z_0, z_1, z_2 ein Kontinuum bildet.

Im Sinne der Nicht-Euklidischen Geometrie sind die Transformationen der einen Schar als Bewegungen, die der anderen als Umlegungen eines *pseudosphärischen* (nicht hyperbolischen!) Raumes anzusprechen, und zwar

[55]) Äquivalente Formeln, die aber nicht eine ebenso durchsichtige Struktur haben, hat H. Poincaré angegeben. Acta Mathematica **3** (1883), S. 54. Vgl. auch L. Bianchi, Math. Ann. **38** (1891), S. 316 und **40** (1892), S. 334.

die angeschriebenen (positiven Determinanten entsprechenden) Transformationen als *zugängliche* Bewegungen und Umlegungen.

Gruppen von $2\cdot\infty^6$ (oder $2\cdot\infty^{2\cdot 6}$) Quaternionentransformationen, die in der doppelten Form (196) darstellbar sind, gibt es noch mehr. Man erhält alle reellen Gruppen derart, und jede nur einmal, wenn man mit Hilfe irgendeiner unter den ∞^2 reellen Wurzeln der Gleichung $e^2 = -1$ alle in der Formel (196) vorkommenden Konstanten transformiert; wenn man also a usw. durch $a_* = e^{-1}ae = -eae$ usf. ersetzt. Diese Gruppen, deren eigentliche Transformationen also Koeffizientensysteme haben, die sämtlich der Gleichung

$$\frac{a_* z + b_*}{c_* z + d_*} = \frac{z a_* + b_*}{z c_* + d_*}$$

identisch genügen, bilden gegenüber der Gruppe Γ_{15}, H_{15} eine nicht-invariante Mannigfaltigkeit. Sie sind alle zueinander ähnlich im Sinne von S. Lie. Jede läßt eine der ∞^2 reellen Ebenen durch die z_0-Achse und alle diese Ebene enthaltenden Flache in Ruhe. Jede ist also vertauschbar mit einer gewissen Involution, sie ist eine Untergruppe der Gesamtgruppe konformer Transformationen, die mit dieser Involution vertauschbar sind. Die isolierten Inzidenzpunkte einer solchen besonderen Involution sind akzessorisch[56]).

[56]) Im komplexen Gebiete gibt es $\infty^{2\cdot 2}$ solche Gruppen, und außerdem noch $\infty^{2\cdot 1}$ andere, die Grenzfälle der ersten und ebenfalls alle untereinander ähnlich sind.

(Eingegangen am 15. August 1923.)

Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone.

Von

Alexander Weinstein in Zürich.

Die Möglichkeit, ein beliebiges einfach zusammenhängendes Polygon auf den Einheitskreis vermittelst der Schwarz-Christoffelschen Formeln abzubilden, wurde bereits von Schwarz selber unter Berufung auf den allgemeinen Riemannschen Abbildungssatz nachgewiesen.

Schläfli[1]), Phragmén[2]) und später Bieberbach[3]) haben dieselbe Frage nach der Kontinuitätsmethode behandelt. Ihre Beweise, die den Umweg über den Riemannschen Satz vermeiden, besitzen aber auch nicht den Charakter der Elementarität und Übersichtlichkeit, der den Schwarz-Christoffelschen Formeln zukommt. Der Schläfli-Phragménsche Beweis ist rechnerisch sehr weitläufig und unübersichtlich, außerdem scheinen mir die Schlüsse des letzten von Phragmén hinzugefügten Teiles nicht in allen Fällen zwingend zu sein.

Der Beweis von Bieberbach stützt sich auf tiefliegende Sätze der Analysis situs und benutzt außerdem funktionentheoretische Hilfsmittel, die nicht mehr zu den Elementen gezählt werden können.

In den folgenden Zeilen wird ein durchaus elementarer Kontinuitätsbeweis des in Frage stehenden Satzes für alle schlichten Polygone entwickelt. Der Beweis, der auch rechnerisch nicht weitläufig ist, wird besonders einfach für den Spezialfall konvexer Polygone.

Ich werde im folgenden in Fußnoten auf einzelne Unterschiede gegenüber den erwähnten Kontinuitätsbeweisen eingehen.

---

[1]) Journal für Mathematik **78** (1874), S. 63–80.

[2]) Acta Mathematica **14** (1890–91), S. 225–232, insbesondere S. 229ff.

[3]) Göttinger Nachrichten 1913, S. 552–560, insbesondere S. 559ff. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **38** (1914), S. 98–112, insbesondere S. 102ff.

Durch die Formel

$$(1) \qquad z = M\int_0^{\zeta}\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{-\beta_1}\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{-\beta_2}\cdots\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_n}\right)^{-\beta_n}d\zeta, \qquad \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} = M$$

wo $M>0$, $\zeta_h = e^{i\sigma_h}$, $|\beta_h|<1$ und $\sum_{h=1}^{n}\beta_h = 2$ ist, wird der Einheitskreis der $\zeta\,(=\varrho e^{i\sigma})$-Ebene auf ein geradliniges n-Eck mit den Außenwinkeln $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \ldots, \beta_n\pi$ abgebildet, welches den Punkt $z=0$ in seinem Innern enthält. Es ist zu zeigen, daß die Abbildungsformel (1), bei passender Wahl der Konstanten $M, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, jedes vorgegebene, den Nullpunkt im Innern enthaltende, schlichte Polygon liefern kann[4]).

Die Gesamtheit der durch (1) gelieferten (nicht notwendig schlichten) Polygone P_S bildet eine zusammenhängende $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_S$, innerhalb welcher ein einzelner „Punkt" P_S etwa durch die Koordinaten $M, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ festgelegt wird. Die Gesamtheit der schlichten, den Nullpunkt im Innern enthaltenden Polygone bildet ebenfalls eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, deren einzelner „Punkt" (Polygon) P, durch die Längen $l_1, l_2, \ldots, l_{n-2}$ von $n-2$ Seiten, seine Außenwinkel $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \ldots, \beta_{n-1}\pi$, den Richtungsparameter φ_1 der Seite l_1 und etwa noch durch die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 eines Endpunktes z_1 von l_1 vollständig festgelegt wird. Es ist zu zeigen, daß jedem P ein P_S entspricht. Zur Anwendung des Kontinuitätsschlußverfahrens ist vor allem notwendig, ausdrücklich festzustellen, daß nicht nur die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_S$, sondern auch die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ zusammenhängend ist[5]). Man kann nun in der Tat leicht einen kontinuierlichen Weg angeben, der zwei beliebige schlichte Polygone P' und P'' miteinander verbindet, indem man durch Veränderung *der Seiten und der Winkel* die Seiten von P' eine nach der anderen mit derjenigen von P'' in Koinzidenz bringt. Bei diesem Deformationsprozeß können als Zwischenstufen n-Ecke mit einem Außenwinkel 0 auftreten.

Sei nun P^1 ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{M}$, von welchem die Existenz eines zugehörigen Originalpunktes P_S^1 in $\mathfrak{M}_S$ bewiesen werden soll.

Wir betrachten einen Punkt P_S^0 in $\mathfrak{M}_S$, für welchen alle $\beta_i>0$ sein sollen. Dieser Punkt besitzt sicher einen Bildpunkt P^0 in $\mathfrak{M}$ ((1) liefert nämlich ein konvexes, also schlichtes Polygon). Wir verbinden P^0 mit

---

[4]) Obwohl $\beta_1, \ldots, \beta_n$ in unmittelbarer Beziehung zu den Winkeln des vorgegebenen Polygons stehen, ist es zweckmäßig, sie neben $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und M als variable Parameter zu betrachten. Vgl. hierzu [5]).

[5]) In den erwähnten Kontinuitätsbeweisen wird ohne nähere Begründung sogar angenommen, daß die Mannigfaltigkeit aller n-Ecke mit *denselben* Außenwinkeln diese Eigenschaft bereits besitzt.

P^1 durch eine stetige *Überführungslinie* L innerhalb $\mathfrak{M}$ und wollen zeigen, daß man durch stetige Abänderung der Koordinaten von P_S^0 einen Originalpunkt zu jedem Punkte von L (insbesondere auch zum Punkte P^1) in $\mathfrak{M}_S$ finden kann.

Zu diesem Ende ist zunächst folgender *Umgebungssatz* zu beweisen: Besitzt ein P auf L einen Originalpunkt P_S in $\mathfrak{M}_S$, so gilt dasselbe auch für eine volle Umgebung von P.

(Aus diesem Satze folgt insbesondere die Existenz von Originalpunkten zu den Punkten eines hinreichend kleinen Anfangsstückes von L.)

Wir wollen zunächst die Behauptung des Umgebungssatzes durch eine andere, ihr äquivalente ersetzen.

Die Bestimmungsstücke $l_1, l_2, \ldots, l_{n-2}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, x_1, y_1, \varphi_1$ von P sind, wie man leicht aus (1) folgern kann, *stetig differentiierbare* Funktionen der Koordinaten $M, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ von P_S. (Im Folgenden werden wir nur die expliziten Ausdrücke für die l_i brauchen: Es ist

$$(2) \qquad l_i = M \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \prod_{h=1}^{n} \left| 2 \sin \frac{\sigma_h - \sigma}{2} \right|^{-\beta_h} d\sigma.)$$

Der Beweis des Umgebungssatzes reduziert sich somit auf den Nachweis des *Nichtverschwindens der Funktionaldeterminante*

$$\Delta = \frac{\partial (l_1, l_2, \ldots, l_{n-2}, x_1, y_1, \varphi_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})}{\partial (M, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})}$$

an der (beliebigen) Stelle P_S von $\mathfrak{M}_S$.[6]) Das Nichtverschwinden von Δ besagt, daß einer beliebigen von P ausgehenden Richtung (charakterisiert durch die Variationen δl_i $(i = 1, \ldots, n-2)$, $\delta x_1, \delta y_1, \delta \varphi_1, \delta \beta_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ der Koordinaten von P) umkehrbar eindeutig eine von P_S ausgehende Richtung: $\delta M, \delta \sigma_1, \ldots, \delta \sigma_n, \delta \beta_1, \ldots, \delta \beta_{n-1}$ entspricht.

Offenbar ist gleichzeitig mit Δ auch die Determinante

$$D = \frac{\partial (l_1, l_2, \ldots, l_{n-2}, x_1, y_1, \varphi_1)}{\partial (M, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)}$$

von Null verschieden. Zum Nachweis der Ungleichung $D \neq 0$ brauchen wir die Winkel des Polygons nicht zu variieren.

---

[6]) Diesem Nachweis ist die Arbeit von Schläfli l. c. [1]) gewidmet. Schläfli beweist das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante durch eine außerordentlich weitläufige Rechnung. Übrigens betrachtet Schläfli die Abbildung des Polygons auf eine Halbebene, einen Fall, auf den sich die von uns befolgte Methode auch anwenden ließe. Herr Bieberbach folgert den Umgebungssatz aus dem allgemeinen, aber tiefliegenden Brouwerschen Satz von der Invarianz des Gebietes.

Um das Nichtverschwinden von D zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß die $n+1$ linearen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
\delta l_i &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial l_i}{\partial \sigma_k}\,\delta\sigma_k + \frac{\partial l_i}{\partial M}\,\delta M, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2)\\
\delta x_1 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_k}\,\delta\sigma_k + \frac{\partial x_1}{\partial M}\,\delta M,\\
\delta y_1 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial \sigma_k}\,\delta\sigma_k + \frac{\partial y_1}{\partial M}\,\delta M,\\
\delta \varphi_1 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma_k}\,\delta\sigma_k + \frac{\partial \varphi_1}{\partial M}\,\delta M,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

bei beliebig vorgegebenen Werten von $\delta l_1, \ldots, \delta l_{n-3}, \delta x_1, \delta y_1, \delta \varphi_1$ stets eine Auflösung besitzen. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die zum System (3) zugehörigen homogenen Gleichungen keine andere Lösung als die triviale $\delta\sigma_1 = \delta\sigma_2 = \ldots = \delta\sigma_n = \delta M = 0$ zulassen.

Wir sehen somit, daß der Umgebungssatz äquivalent ist mit der folgenden Behauptung:

Verschwinden (bei festgehaltenen Winkeln) die Variationen der Bestimmungsstücke $l_1, \ldots, l_{n-3}, x_1, y_1, \varphi_1$ von P, so verschwinden auch die Variationen der Parameter $M, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ der dem Polygon P entsprechenden Formel (1); oder etwas anders ausgedrückt:

Ein unvariiert bleibendes Polygon P aus $\mathfrak{M}$ kann nicht durch zwei unendlich benachbarte Formeln (1) auf den Einheitskreis abgebildet werden.

Beweis. Die Formel (1) definiert eine (von den Parametern $\zeta_h = e^{i\sigma_h}$ $(h = 1, \ldots, n)$ und M abhängige) Funktion

$$\zeta = f(z),$$

die das Polygon P auf den Einheitskreis abbildet. Geht man zu unendlich benachbarten Werten der Parameter über, so erhält man nach (1) ein zu P benachbartes Polygon P^*; dem entspricht eine Abbildungsfunktion

$$\zeta^* = \zeta + \delta\zeta = f^*(\zeta).$$

Jeder Punkt z im Innern von P gehört im Limes auch zum Polygon P^*. Jedem solchen z entsprechen somit vermöge der beiden Funktionen f und f^* zwei benachbarte Punkte ζ und $\zeta + \delta\zeta$ des Einheitskreises, und die Variation $\delta f (= \delta\zeta)$, die f beim Übergange zu f^* erfährt, ist eine überall im Innern von P regulär analytische Funktion, die übrigens für $z = 0$ verschwinden muß. Wegen der umkehrbar eindeutigen Beziehung $\zeta = f(z)$

können wir δf (oder was dasselbe ist: $\delta\zeta$), auch als Funktion von ζ auffassen und ihren Wert dann explizite angeben:

Aus (1) folgt nämlich durch Differentiation bei festgehaltenem z

$$0 = M\Pi\cdot\delta\zeta + \delta\left(M\int_0^\zeta \Pi d\zeta\right),$$

wo Π den Integranden in (1) bedeutet und das zweite δ sich auf die Variation der Parameter beziehen soll.

Daraus ergibt sich

$$(4)\quad \delta f = \delta\zeta = -\prod_{h=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_h}\right)^{\beta_h}\left\{\int_0^\zeta\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\zeta_i^0}\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_i}\right)^{-(1+\beta_i)}\prod_{k=1}^{n}{}^{(i)}\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_k}\right)^{-\beta_k}\delta\zeta_i\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\delta M}{M}\int_0^\zeta\prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_r}\right)^{-\beta_r}d\zeta\right\}\right],$$

wobei der obere Index (i) an dem vorletzten Π die Auslassung des i-ten Faktors bei der Produktbildung bedeuten soll.

Aus diesem Ausdruck kann man sofort erkennen, daß δf auch noch auf der Peripherie $|\zeta| = 1$ regulär analytisch ist mit Ausnahme der „Ecken" $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, und zwar bleibt bei der Annäherung von innen an einen Punkt ζ_k, der einer konvexen Ecke ($\beta_k > 0$) entspricht, δf stetig, wogegen im Falle $\beta_k < 0$

$$(5)\qquad |\delta f| = O(|\zeta - \zeta_k|^{\beta_k})$$

ist, wo O das bekannte Bachmann-Landausche Symbol bedeutet. Im Falle eines konvexen Polygons ist δf somit beschränkt und stetig.

Wir wollen nun den uns interessierenden Fall betrachten, wo die Variationen $\delta l_1, \ldots, \delta l_{n-2}$, δx_1, δy_1, $\delta\varphi_1$ aller Bestimmungsstücke von P verschwinden, und zeigen, daß man daraus auf das identische Verschwinden von δf schließen kann. (Aus $\delta f \equiv 0$ wird sich leicht $\delta M = \delta\sigma_1 = \ldots = \delta\sigma_n = 0$ ergeben.) Zu diesem Ende stellen wir die Randbedingungen auf, denen δf im vorliegenden Falle genügen muß.

Sei z ein innerer Punkt einer Seite l_i von P. Diesem z entspricht vermöge der Funktion $\zeta = f(z)$ ein Punkt $\zeta = e^{i\sigma}$ auf der Peripherie des Einheitskreises. Neben z betrachte ich denjenigen Punkt $z + \delta z$ der l_i entsprechenden Seite l_i^* von P^*, welchem durch die Funktion f^* derselbe Wert $\zeta = e^{i\sigma}$ zugeordnet wird. Es ist also

$$f^*(z + \delta z) = f(z)$$

oder, bis auf Glieder höherer Ordnung,

$$(6)\qquad \delta f + \left(\frac{df}{dz}\right)_z \delta z = 0.$$

Bei der Bildung von $\left(\frac{df}{dz}\right)_z$ denke ich mir den Zuwachs dz in Richtung der Seite l_i genommen; dann hat aber der Zuwachs δf von $\zeta = f(z)$ offenbar die Richtung der Tangente an den Einheitskreis im Punkte $\zeta = e^{i\sigma}$.

Die unbekannte Verschiebung δz spalte ich in eine Komponente in Richtung von l_i und eine solche senkrecht dazu. Diese letztere kann man, da die Dimensionen von P beim Übergang zu P^* in 1-ter Ordnung invariiert bleiben, in der Formel (6) vernachlässigen. Dann folgt aber aus (6), daß δf auch wie df eine Verschiebung längs der Kreisperipherie $|\zeta| = 1$ sein muß. Bezeichnen wir also mit $W(\zeta) = U + iV$ die für $|\zeta| < 1$ überall (auch für $\zeta = 0$) reguläre Funktion $\frac{\delta f}{\zeta}$, so ist ihr Realteil

$$U = 0$$

für alle Punkte des Randes $|\zeta| = 1$ eventuell mit Ausnahme der „Ecken“ $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

Wegen der früher bewiesenen Stetigkeit ist $U = 0$ in allen denjenigen „Ecken“ ζ_i, für welche der zugehörige Exponent $\beta_i > 0$ ist.

Im Falle eines konvexen Polygons kann man also ohne weiteres auf das identische Verschwinden von U für $|\zeta| \leqq 1$ schließen. Besitzt aber P einspringende Ecken (in diesen ist dann das Verhalten von δf durch (5) gegeben), so kann man das identische Verschwinden von U aus bekannten Sätzen von Phragmén und Lindelöf[7]) folgern. Wir wollen diese durch aus elementare Schlußweise hier explizite durchführen, wobei wir der Übersichtlichkeit halber annehmen werden, daß P nur eine einspringende Ecke, etwa ζ_1 $(-1 < \beta_1 < 0)$ besitzt. Die Gleichung $U = 0$ ist dann für die ganze Peripherie $|\zeta| = 1$ gültig mit Ausnahme des Punktes ζ_1. Wir bilden die Funktion $e^{W(\zeta)} = F(\zeta)$. F ist für $|\zeta| < 1$ regulär, ferner stetig und absolut genommen gleich 1 für alle $\zeta = e^{i\sigma}$ mit Ausnahme vielleicht von $\zeta = \zeta_1$. Aus der Formel (5) folgt, daß $F(\zeta)\, e^{-\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^\gamma}}$ bei Annäherung an ζ_1 gleichmäßig gegen 0 strebt, wenn γ eine der Ungleichung $1 > \gamma > -\beta_1$ (> 0) genügende Konstante bedeutet. Wir betrachten nun nach dem Vorgange von Phraghmén und Lindelöf die Funktion

$$\Omega(\zeta) = e^{-\frac{1}{[(\zeta-\zeta_1)\, e^{i(\pi-\sigma_1)}]^{\gamma'}}} \qquad (0 < \gamma < \gamma' < 1),$$

deren absoluter Betrag $|\Omega(\zeta)| = e^{-\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{\gamma'}} \cos \gamma' \psi}$ ist. ψ bedeutet dabei die Amplitude von $(\zeta - \zeta_1) e^{i\pi(\sigma-\sigma_1)}$ und genügt somit für alle ζ im Ein-

[7]) Acta Mathematica **31** (1908), S. 381–406.

heitskreis der Ungleichung $-\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt, daß $\cos \gamma' \psi$ für alle $|\zeta| \leqq 1$ größer als $\cos \frac{\gamma' \pi}{2} = \alpha > 0$ ist, d. h. daß

$$|\Omega(\zeta)| \leqq e^{-\frac{\alpha}{|\zeta - \zeta_1|^{\gamma'}}} < 1$$

ist.

Die Funktion $\Phi(\zeta) = \Omega^{\lambda}(\zeta) F(\zeta)$ ist für jedes $\lambda > 0$ im Innern des Einheitskreises regulär, am Rande stetig und dem absoluten Betrage nach < 1. Läßt man λ nach 0 konvergieren, so bekommt man

$$|F(\zeta)| \leqq 1$$

für alle $|\zeta| \leqq 1$. Indem man neben F noch die Funktion $\frac{1}{F}$ betrachtet, kann man leicht schließen auf das identische Bestehen der Gleichung $|F(\zeta)| = 1$, d. h.

$$U = 0$$

für alle $|\zeta| \leqq 1$.

Dieselbe Schlußweise ist anwendbar, auch wenn P eine beliebige Anzahl von konkaven und konvexen Ecken besitzt. Wir können also behaupten, daß $\frac{\delta f}{\zeta}$ gleich einer rein imaginären Konstanten $i\varepsilon$ ist, d. h. es ist $\delta f = i \varepsilon \zeta$. Da aber nach (1) oder (4) $\frac{d(\delta f)}{d\zeta}$ für $\zeta = 0$ reell sein muß, ist die Konstante $\varepsilon = 0$. Wir haben somit das identische Verschwinden von δf bewiesen.

Es ist nun, um den Beweis des Umgebungssatzes zu vollenden, notwendig zu zeigen, daß man aus dem identischen Verschwinden von δf das Verschwinden der Variationen $\delta M, \delta \sigma_1, \ldots, \delta \sigma_n$ folgern kann.

δf ist nach (4) eine lineare homogene Funktion dieser Variationen. Um z. B. das Verschwinden von $\delta \sigma_m$ festzustellen, lassen wir ζ nach ζ_m konvergieren und richten unsere Aufmerksamkeit auf die in (4) als Faktoren auftretenden Potenzen von $\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_m}\right)$; das sind die einzigen Größen, die dabei 0 oder ∞ werden können.

Ist $\beta_m > 0$, so verschwinden im Limes, wegen dem der geschweiften Klammer vorstehenden Faktor $\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_m}\right)^{\beta_m}$, alle Glieder in (4) bis auf das m-te Glied der Summe Σ, welches unter dem Integralzeichen den Faktor $\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_m}\right)^{-(1+\beta_m)} = -\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{\beta_m} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_m}\right)^{-\beta_m}$ enthält. Durch partielle Integration erhält man $\lim_{\zeta = \zeta_m} \delta f = \delta \sigma_m$, woraus, da $\delta f \equiv 0$ ist, $\delta \sigma_m = 0$ folgt.

Ist aber $\beta_m < 0$, so lehrt dieselbe Betrachtung, daß man δf entsprechend den beiden Summanden in der geschweiften Klammer von (4) in der Form

$$\delta f = \left\{ \left(\frac{\zeta}{\zeta_m} \delta \sigma_m + \varphi_1(\zeta) \right) + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_m}\right)^{\beta_m} \varphi_2(\zeta) \right\} \tag{7}$$

schreiben kann. Dabei bedeuten φ_1 und φ_2 zwei beschränkte Funktionen, wovon φ_1 mit $\zeta - \zeta_m$ nach 0 geht, während φ_2 nach dem Wert

$$\left(1-\frac{\zeta_m}{\zeta_1}\right)^{\beta_1}\left(1-\frac{\zeta_m}{\zeta_2}\right)^{\beta_2}\cdots\left(1-\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}\right)^{\beta_{m-1}}\left(1-\frac{\zeta_m}{\zeta_{m+1}}\right)^{\beta_{m+1}}\cdots\left(1-\frac{\zeta_m}{\zeta_n}\right)^{\beta_n}\cdot z_m\cdot\frac{\delta M}{M^2}$$

konvergiert [$z_m(\neq 0)$ ist die Koordinate des Bildpunktes von ζ_m]. Da $\delta f \equiv 0$ sein muß und $\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_m}\right)^{\beta_m}$ unendlich wird, muß φ_2 für $\zeta - \zeta_m$ verschwinden. Das ist nur möglich, wenn die Konstante $\delta M = 0$ ist, woraus sich das identische Verschwinden von φ_2 ergibt. Dann folgt aber aus (7), daß auch hier $\delta\sigma_m = 0$ sein muß.

Auf diese Weise wird festgestellt, daß alle $\delta\sigma_i = 0$ sind. Somit muß nach (4) wegen $\delta f \equiv 0$ auch $\delta M = 0$ sein.

Es ist hier notwendig, eine Bemerkung einzuschalten.

P kann einen Außenwinkel 0 ($\beta_m = 0$) besitzen. Solche „uneigentliche“ n-Ecke treten notwendigerweise auf der Überführungslinie L auf, falls P^1 im Gegensatz zu P^0 kein konvexes Polygon ist. Ist $\beta_m = 0$, so tritt die entsprechende Variation $\delta\sigma_m$ in dem Ausdruck (4) für δf überhaupt nicht auf. Im vorangehenden ist ihr Verschwinden somit noch nicht festgestellt, der Umgebungssatz ist also vorläufig nur für den Fall bewiesen, wo P ein „eigentliches“ n-Eck ist. Es ist aber leicht, diese Lücke auszufüllen:

Aus einem eigentlichen $(n-1)$-Eck entsteht ein n-Eck mit einem Außenwinkel 0, indem man den Bildbogen einer Seite l_i in zwei Teile durch einen Zwischenpunkt σ_m teilt und an Stelle von der durch das Integral (2) ausgedrückten Länge von l_i zwei Integrale mit demselben Integranden erstreckt von σ_i bis σ_m und von σ_m bis σ_{i+1} einführt. Das Verhältnis der beiden neuen Längen kann bei passender Wahl von σ_m jeden Wert annehmen.

Da der Umgebungssatz für ein eigentliches $(n-1)$-Eck bereits bewiesen ist, gilt er offenbar auch für das daraus entstandene uneigentliche n-Eck.

Der Umgebungssatz lehrt uns zunächst, daß die auf der Überführungslinie L liegenden Nachbarpunkte von P^0 Originalpunkte innerhalb $\mathfrak{M}_S$ besitzen. Es ist nun zu zeigen, daß man beim Fortschreiten auf L keine „Schwelle“ $\tilde{P}$ antrifft, so daß nur die P auf L, welche vor $\tilde{P}$ liegen, Originalpunkte in $\mathfrak{M}_S$ besitzen, $\tilde{P}$ selbst aber nicht.

Wir werden diese Behauptung leicht folgern können aus dem jetzt zu beweisenden *Schränkungssatz*. Dieser besagt folgendes: Aus der Tatsache, daß das Polygon P bei der Wanderung auf L nicht ausartet (daß also insbesondere seine Seitenlängen endlich und oberhalb einer positiven

festen Schranke bleiben und daß sein Umfang stets ein einziges einfach zusammenhängendes Gebiet umschließt), kann man die Existenz von Schranken für die Werte der Koordinaten des zugehörigen Originalpunktes P_S folgern, nämlich die Existenz endlicher von 0 und ∞ verschiedener Schranken für M und einer positiven unteren Grenze für die Differenzen der σ_i.

Zunächst ist nämlich klar, daß M, wenn P sich dem Polygone $\tilde{P}$ nähert, weder 0 noch ∞ werden kann. Denn sonst würde, wie ein Blick auf (1) lehrt, die Fläche von P (wie auch sich die σ_i verhalten mögen) dabei unendlich groß oder unendlich klein, was beides nicht der Fall ist.

Nachdem dies festgestellt ist, wollen wir die Unmöglichkeit des Zusammenrückens der Parameter σ_i beweisen, indem wir zeigen, wie eine entgegengesetzte Annahme zu einem Widerspruch führt.

Es sei etwa $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ $(p = 2, \ldots, n)$ eine bei der Annäherung von P an $\tilde{P}$ zusammenrückende Gruppe von Parametern, d. h. es soll die untere Schranke von $|\sigma_2 - \sigma_1| + |\sigma_3 - \sigma_2| + \ldots + |\sigma_p - \sigma_{p-1}|$ gleich Null sein. Dagegen sollen, im Falle $p < n$, die Differenzen $|\sigma_{p+1} - \sigma_p|$ und $|\sigma_1 - \sigma_n|$ nicht unter jede positive Grenze herabsinken.

Wir bezeichnen die Seitenlängen und die Außenwinkel von $\tilde{P}$ mit $\tilde{l}_i$ bzw. $\tilde{\beta}_i \pi$ $(i = 1, \ldots, n)$. Die in (2) auftretenden Integrale stellen $\frac{l_i}{M}$ dar und sollten daher trotz dem Zusammenrücken der Parameter endliche und von 0 verschiedene Schranken haben. Wir betrachten insbesondere die p ersten dieser Integrale. Sie zeigen beim Zusammenrücken der Parameter $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ das gleiche Verhalten wie die Integrale

$$L_i = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \prod_{k=1}^{p} |\sigma - \sigma_k|^{-\beta_k} d\sigma$$

$(i = 1, 2, \ldots, p$, für $p = n$ ist $\sigma_{p+1} = \sigma_p + c$, wo c eine beliebige positive Konstante bedeutet, zu setzen), d. h. sie werden gleichzeitig mit diesen 0 oder ∞.

Es genügt daher beim Beweise der Unmöglichkeit des Zusammenrückens an Stelle der Integrale (2) das Verhalten der L_i, die ja auch endlich und von 0 verschieden bleiben sollen, zu untersuchen.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 + \ldots + \tilde{\beta}_p \geqq 1$, so bekommt man einen Widerspruch, indem man mit leichter Mühe feststellt, daß L_p die obere Schranke Unendlich besitzt.

Man kann (wegen $\lim \beta_k = \tilde{\beta}_k$) durch eventuelle kleine Abänderung des Weges L erreichen, daß für alle P auf L in der Nähe von $\tilde{P}$ auch

$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p \geqq 1$ ist. Wir setzen nun $\sigma-\sigma_1=\tau$, $\sigma_1=\tau_1$, $\sigma_i-\sigma_1=\tau_i$ $(i\neq 1)$ und bezeichnen die Summe derjenigen Exponenten unter den $-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_p$, die positiv sind, mit μ, die Summe der übrigen mit $-\nu$ $(\nu>0)$, so daß also $\mu-\nu\leqq -1$ ist.

L_p wird beim Zusammenrücken von $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ größer als

$$\overline{L}_p=\int_{\tau_p}^{\tau_p+c}\frac{|\tau-\tau_p|^\mu}{\tau^\nu}\,d\tau > \tau_p^{1+(\mu-\nu)}\int_1^{1+\frac{c}{\tau_p}}\frac{|t-1|^\mu}{t^\nu}\,dt$$

(wo c eine beliebige feste positive Zahl und $t=\frac{\tau}{\tau_p}$ ist). Daraus folgt aber wegen $1+(\mu-\nu)\leqq 0$ das Unendlichwerden von L_p.

Insbesondere ist damit die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Zusammenrückens aller n Parameter σ_i oder auch nur von $n-1$ derselben dargetan, da man dabei ja $\mu-\nu<-1$ hätte. Wir können also im Falle 2 die Voraussetzung $p<n-1$ machen.

2. Ist $\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2+\ldots+\tilde{\beta}_p<1$ $(1<p<n-1)$, so ergibt sich ohne weiteres ein Widerspruch, wenn alle $\tilde{\beta}_i$ (also auch alle β_i) >0 $(i=1,2,\ldots,p)$ sind. (Insbesondere ist das der Fall, wenn man sich auf die Betrachtung *konvexer* Polygone beschränkt.)

Die untere Schranke eines jeden L_i $(i=1,\ldots,p-1)$ ist nämlich dann gleich 0. In dieser ist z. B. (unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung)

$$L_1<\int_0^{\tau_1}\frac{d\tau}{\tau^{\beta_1}\,|\,\tau-\tau_1\,|^{\beta_2+\ldots+\beta_p}}=\tau^{1-\sum_1^p\beta_i}\int_0^1\frac{du}{u^{\beta_1}(1-u)^{\beta_2+\ldots+\beta_p}}\quad\left(u=\frac{\tau}{\tau_1}\right),$$

woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

Damit ist der Schränkungssatz für konvexe Polygone bewiesen.

Sind aber nicht alle $\beta_i>0$ $(i=1,\ldots,p)$, so kann, wenn $\sum_1^p\beta_i<1$ ist, auch der merkwürdige Fall eintreten, daß sämtliche in (2) auftretenden Integrale zwischen endlichen und von Null verschiedenen Schranken bleiben[8]).

---

[8]) In den Ergänzungen, die Herr Phragmén, l. c.[2]) als Erwiderung auf eine Arbeit von Jules Riemann (Annales scientifiques de l'école normale supérieure 1888, S. 327—410), dem Schläflischen Beweis hinzugefügt hat, wird der Schränkungssatz nicht im Einzelnen begründet. Es scheint jedoch aus den Ausführungen des Herrn Phragmén hervorzugehen, daß er die obige Möglichkeit nicht in Betracht gezogen hat.

Das wird gezeigt durch das folgende Beispiel[9]).

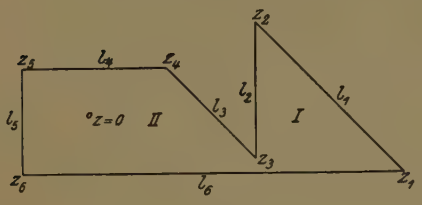

Fig. 1.

Man setze in (1) $\beta_1 = \frac{3}{4}$, $\beta_2 = \frac{3}{4}$, $\beta_3 = -\frac{3}{4}$, die übrigen β_i aber beliebig. Man erhält dadurch die Abbildung des Einheitskreises auf ein Polygon mit drei aufeinanderfolgenden Innenwinkeln $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ (Fig. 1).

Nun lasse man die Parameter $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ in der Weise zusammenrücken, daß man $\zeta_1 = 1 = e^{i0}$, $\zeta_2 = e^{i\varepsilon^{3/2}}$, $\zeta_3 = e^{i\varepsilon}$ setzt und ε nach 0 gehen läßt. Macht man nun im Ausdrucke für L_1

$$L_1 = \int_0^{\varepsilon^{3/2}} \sigma^{-\frac{3}{4}} |\sigma - \varepsilon^{\frac{3}{2}}|^{-\frac{3}{4}} |\sigma - \varepsilon|^{\frac{3}{4}} d\sigma$$

die Substitution $\varepsilon^{\frac{3}{2}} t = \sigma$, so sieht man, daß

$$L_1 = \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} |1 - t|^{-\frac{3}{4}} |\sqrt{\varepsilon}\, t - 1|^{\frac{3}{4}} dt,$$

daß als L_1 und auch l_1 beim Zusammenrücken der Parameter endlich und von Null verschieden bleibt.

Dasselbe gilt aber auch von l_2. Man setze $\varepsilon\sigma = t$ in

$$L_2 = \int_{\varepsilon^{3/2}}^{\varepsilon} \sigma^{-\frac{3}{4}} |\sigma - \varepsilon^{\frac{3}{2}}|^{-\frac{3}{4}} |\sigma - \varepsilon|^{\frac{3}{4}} d\sigma$$

und erhält

$$L_2 = \varepsilon^{\frac{1}{4}} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 t^{-\frac{3}{4}} |t - \sqrt{\varepsilon}|^{-\frac{3}{4}} |t - 1|^{\frac{3}{4}} dt$$

$$= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} u^{-\frac{3}{4}} |u - 1|^{-\frac{3}{4}} |\sqrt{\varepsilon}\, u - 1|^{\frac{3}{4}} du \qquad (\sqrt{\varepsilon}\, u = t),$$

[9]) Die Möglichkeit des Zusammenrückens der Parameter ohne gleichzeitige Ausartung der Seiten*längen* läßt sich, wenn man sich auf die Existenz der Abbildungsfunktion stützen will, ohne Rechnung in dem Falle voraussehen, wo ein Teilgebiet (I in Fig. 1) des Polygons dadurch in der Grenze vom übrigen Rest II abgeschnürt wird, daß eine Ecke (z_3) auf eine Seite (l_6) hinaufrückt. Im Haupttext wird sogleich gezeigt, daß auch umgekehrt bei jedem Zusammenrücken der Parameter, bei welchen die Seiten endlich bleiben, eine Abschnürung notwendig eintreten muß. Damit sind die von Jules Riemann, l. c.[3]) (insbesondere S. 373 ff.) aufgeworfenen Fragen beantwortet.

welcher Ausdruck für $\varepsilon = 0$ offenbar endlich bleibt. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, daß auch alle übrigen Seiten endlich bleiben.

Wir sehen, daß man im Falle $\beta_1 + \ldots + \beta_p < 1$ durch Betrachtung der Seitenlängen allein nicht immer zu einem Widerspruch gegen die Annahme des Zusammenrückens von $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ gelangen kann.

Deshalb wollen wir folgendermaßen verfahren. Wir schlagen um ζ_1 als Mittelpunkt einen (infinitesimalen) im Innern der Peripherie $|\zeta| = 1$ gelegenen Halbkreis H mit einem Radius r größer als $|\zeta_1 - \zeta_p|$, der aber gleichzeitig mit $|\zeta_1 - \zeta_p|$ unendlich klein wird. (Man setze z. B. $r = \sqrt{|\zeta_1 - \zeta_p|}$.) Diesem Halbkreis entspricht in P nach (1) eine analytische Linie, welche (wegen $p < n - 1$) Punkte von zwei *nicht* aufeinanderfolgenden Seiten l_p und l_n miteinander verbindet. Es wird sich zeigen, daß die Länge L_B dieser „Brücke" beim Zusammenrücken von $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ nach 0 geht. Das bedeutet, daß entweder die Längen aller Seiten $l_1, \ldots, l_{p-1}$ nach 0 gehen oder (wie dies in der Abb. 1 angedeutet wird) daß eine Abschnürung des Polygons eintritt, indem eine Ecke (z_3) auf eine nicht anschließende Seite (l_6) hinaufrückt. Beides kann aber für Polygone P auf der Überführungslinie nicht eintreten.

Eine leichte Abschätzung bestätigt das Gesagte über das Verhalten von L_B.

Es ist nämlich

$$L_B = \int_H |\zeta - \zeta_1|^{-\beta_1} |\zeta - \zeta_2|^{-\beta_2} \ldots |\zeta - \zeta_p|^{-\beta_p} |\zeta - \zeta_{p+1}|^{-\beta_{p+1}} \ldots |\zeta - \zeta_n|^{-\beta_n} |d\zeta|.$$

Führt man Polarkoordinaten r, ϑ mit ζ_1 als Pol ein, so ergibt sich

$$L_B < r^{1 - \sum_1^p \beta_i} \int_0^{\pi} \prod_{k=p+1}^{n} |\zeta - \zeta_k|^{-\beta_k} d\vartheta.$$

Der Integrand bleibt endlich, und L_B geht wegen $\sum_1^p \beta_i < 1$ beim Zusammenrücken der Parameter nach Null, w. z. b. w.

Aus dem Schränkungssatz folgt jetzt mit Leichtigkeit als letzter Schritt des Kontinuitätsbeweises der *Limessatz*, welcher die Existenz der Schwelle $\tilde{P}$ (vgl. S. 79) verneint[10]).

In der Tat kann man, wenn P sich auf L dem Punkte $\tilde{P}$ nähert, eine konvergente Folge aus den entsprechenden Originalpunkten P_S aussondern, die nach einem Punkt $\tilde{P}_S$ in $\mathfrak{M}_S$ mit den Koordinaten

[10]) Bei Herrn Bieberbach ergibt sich der Limessatz (unabhängig von dem nicht benutzten Schränkungssatze) als eine Folgerung der verallgemeinerten Resultate von Carathéodory über Konvergenz von Funktionenfolgen. Die Methode ist also dieselbe, welche zum Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes benutzt werden kann.

$\tilde{M}, \tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{n-1}$ strebt. Dieser $\tilde{P}_S$ liegt im Innern von $\mathfrak{M}_S$, d. h. $\tilde{M}$ ist > 0 und endlich und alle σ_i sind voneinander verschieden. Dem Punkte $\tilde{P}_S$ entspricht nach (1) ein bestimmter Punkt im $\mathfrak{M}$, welcher wegen der Stetigkeit der durch (1) vermittelten Abbildung nicht von $\tilde{P}$ verschieden sein kann.

Man wird also bei der Wanderung auf L durch keine „Schwelle“ $\tilde{P}$ aufgehalten. Jeder Punkt von L, insbesondere auch der Endpunkt P^1, besitzt einen Originalpunkt in $\mathfrak{M}_S$. Damit ist der Abbildungssatz für schlichte Polygone bewiesen.

(Eingegangen am 25. Oktober 1923.)

Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

I.

In einer Reihe von Arbeiten habe ich die Lösungen von linearen und nichtlinearen Differential- und Differenzengleichungen, Volterraschen Integralgleichungen und Summengleichungen als Laplacesche Integrale dargestellt. Von der linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, die Poincaré auf diese Weise behandelt hat, konnte ich zu anderen Differential- und Funktionalgleichungen übergehen, indem ich als Laplacesche Transformierte nicht eine Differentialgleichung, sondern eine Integralgleichung vom Volterraschen Typus einführte. Die Laplaceschen Integrale, die sich durch divergente Potenzreihen asymptotisch darstellen ließen, konnten in konvergente Fakultäten- und Gammaquotientenreihen entwickelt werden [1]).

[1]) Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. **71** (1911), S. 510—532. — Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle, Journ. f. Math. **143** (1913), S. 212—240. — Laplacesche Integrale als Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen, Journ. f. Math. **144** (1914), S. 167—189; **151** (1921), S. 167—199. — Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen, Journ. f. Math. **146** (1915), S. 95—115. — Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, Jahresber. d. D. Math.-Ver. **24** (1915), S. 210—225. — Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen, Jahresber. **24** (1915), S. 309—329; **25** (1916), S. 74—83. — Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen, Jahresber. **25** (1916/17), S. 301—325. — Über eine nichtlineare Differenzengleichung, Jahresber. **26** (1917), S. 230—251. — Über nichtlineare Differenzengleichungen, Arch. d. Math. u. Phys. (3) **25** (1916), S. 137—148. — Analytische Lösungen von Summengleichungen, Arch. (3) **26** (1918), S. 132—145. — Zur Theorie der nichtlinearen Differenzenglei-

Ich will zeigen, daß sich die Laplaceschen Integrale auch in konvergente *Binomialkoeffizientenreihen* (Newtonsche Reihen) entwickeln lassen [2]).

Ich knüpfe an § 1 und § 2 der angeführten Arbeit im 8. Bd. der Math. Zeitschr. an; ich beschränke mich demnach auf *lineare Differentialgleichungen.* Ähnlich könnte man im Anschluß an die anderen genannten Arbeiten auch bei nichtlinearen Differentialgleichungen, Differenzengleichungen und anderen Funktionalgleichungen verfahren.

In der genannten Arbeit im 8. Band ist die lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ vom Rang k auf die Form

$$(D) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

$$P_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x^{\frac{1}{k}}} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^{\frac{2}{k}}} + \ldots \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gebracht worden. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

sollen voneinander verschieden sein. Wir können $a_m = 0$, $a_m^{(1)} = 0, \ldots, a_m^{(k-1)} = 0$ annehmen, so daß die Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+\frac{n}{k}}}$$

---

chungen, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 80—114. — Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen, Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 265—313. — Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen, Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 100—114. — Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 263—282.

Birkhoff, Am. Tr. **10** (1909), S. 436—470; **14** (1913), S. 462—476; Math. Ann. **74** (1913), S. 122—139, führt eine lineare Differentialgleichung oder ein System linearer Differentialgleichungen mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ durch eine lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen in ein Differentialgleichungssystem mit *rationalen* Koeffizienten über, welches durch die (verallgemeinerte) Laplacesche Transformation in ein System linearer Differentialgleichungen (nicht Integralgleichungen) übergeführt wird.

[2]) Literaturangaben über Newtonsche Reihen finden sich auf S. 687—691 des Bandes II C der Enzyklopädie der math. Wissensch. in dem Bericht von Nörlund über Differenzengleichungen. — In Beziehung zu dem Folgenden stehen die Arbeiten: Rietti, Alcuni sviluppi in serie di fattoriali, Giorn. di Mat. **51** (1913), S. 240—245; Kameda, On the theory of finite differences, Tôhoku Math. Journ. **16** (1919), S. 62—72.

formal befriedigt wird. Der reelle Teil von r kann positiv angenommen werden. Als Lösung der Differentialgleichung (D) erscheint ein Laplacesches Integral

$$y = \int_0^\infty v(z)\, e^{zx}\, dz,$$

wo $v(z)$ der linearen Integralgleichung

$$(z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z)\, v(z) = \int_0^z \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu(z-\zeta)\, \zeta^{m-\mu} \cdot v(\zeta)\, d\zeta$$

genügt;

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_\mu^{(\lambda)} (-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

ist, abgesehen von $z = 0$, beständig konvergent. In der Umgebung von $z = 0$ gilt die konvergente Entwicklung

$$v(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n (-z)^{r+\frac{n}{k}-1}}{\Gamma\left(r+\frac{n}{k}\right)}.$$

Auf einer Geraden $\arg z = \omega$, welche keine Nullstelle von $z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$ enthält, ist

$$|v(z)| < C e^{(\sigma(\omega)+\delta)|z|},$$

wo δ eine beliebig kleine und C eine hinreichend große positive Größe ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Koeffizienten P_μ im Gebiet $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geqq 0$ regulär sind. Das über die Gerade $\arg z = \omega$ erstreckte Laplacesche Integral ist demnach im Gebiet $\Re(x e^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$ absolut konvergent.

Durch die Substitution

$$z = \frac{1}{x} \log t, \qquad |x| = \gamma, \qquad x = -\gamma e^{-i\omega}$$

geht das Laplacesche Integral

$$y = \int_0^\infty v(z)\, e^{zx}\, dz$$

mit dem Integrationsweg $\arg z = \omega$ in das Integral

$$y = -\frac{1}{x} \int_0^1 \varphi(t)\, t^{\frac{x}{x}-1}\, dt$$

mit reellem Integrationsweg über;

$$\varphi(t) = v\left(\frac{1}{x} \log t\right)$$

genügt für reelle positive t der Ungleichung

$$|\varphi(t)| < Ct^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Wir wählen $s = s(\omega)$ so, daß die Ungleichung $s > \frac{\sigma(\omega)}{\gamma} - 1$ erfüllt ist. Dann ist

$$\int_0^1 \varphi(t)\, t^s\, dt$$

konvergent. (Im Falle $\gamma > \sigma(\omega)$ kann $s = 0$ angenommen werden.) Wir setzen

$$y = -\frac{1}{\varkappa}\int_0^1 \varphi(t)\, t^s \cdot t^{\frac{x}{\varkappa}-s-1}\, dt.$$

Es ist für $|1-t|<1$, also auch für $0 \leqq \tau < t \leqq 1$

$$t^{\frac{x}{\varkappa}-s-1} = (1-(1-t))^{\frac{x}{\varkappa}-s-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{x}{\varkappa}-s-1}{n}(1-t)^n,$$

daher, wenn gliedweise integriert werden darf,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\binom{\frac{x}{\varkappa}-s-1}{n}, \qquad C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\varkappa}\int_0^1 \varphi(t)\, t^s (1-t)^n\, dt.$$

Nun ist

$$|C_n| < \frac{C}{\gamma}\int_0^1 t^{s-\frac{\sigma}{\gamma}-\varepsilon}(1-t)^n dt = \frac{C}{\gamma}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{\sigma}{\gamma}+1-\varepsilon\right)n!}{\Gamma\left(s-\frac{\sigma}{\gamma}+n+2-\varepsilon\right)},$$

$$\binom{\frac{x}{\varkappa}-s-1}{n} = \frac{\left(\frac{x}{\varkappa}-s-1\right)\cdots\left(\frac{x}{\varkappa}-s-n\right)}{n!} = (-1)^n\,\frac{\Gamma\left(n-\frac{x}{\varkappa}+s+1\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{\varkappa}+s\right)n!}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $\frac{x}{\varkappa}-s-1$ weder Null noch eine positive ganze Zahl ist, so daß die Reihe nicht abbricht. Dann ist $1-\frac{x}{\varkappa}+s$ weder Null noch eine negative ganze Zahl, und dasselbe gilt für $n-\frac{x}{\varkappa}+s+1$. Es ist

$$\frac{\Gamma(n+\xi+1)}{\Gamma(n+1)} = n^{\xi}(1+\delta), \quad \lim_{n=\infty}\delta = 0,$$

also

$$\frac{n!}{\Gamma\left(s-\frac{\sigma}{\gamma}+n+2-\varepsilon\right)} = n^{\frac{\sigma}{\gamma}-s+\varepsilon-1}(1+\delta'), \quad \lim_{n=\infty}\delta' = 0,$$

$$\left|\frac{\Gamma\left(n-\frac{x}{\varkappa}+s+1\right)}{n!}\right| = n^{s-\Re\left(\frac{x}{\varkappa}\right)}(1+\delta'') = n^{s+\frac{1}{\gamma}\Re(xe^{i\omega})}(1+\delta''), \quad \lim_{n=\infty}\delta''=0,$$

$$\left|C_n\binom{\frac{x}{\varkappa}-s-1}{n}\right| < \frac{C}{\gamma}\left|\frac{\Gamma\left(s-\frac{\sigma}{\gamma}+1-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{\varkappa}+s\right)}\right| \cdot n^{\frac{\Re(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)}{\gamma}-1}(1+\delta), \quad \lim_{n=\infty}\delta=0.$$

Da ε beliebig klein ist, ist die Reihe

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\binom{\frac{x}{\varkappa}-n+1}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{\left(\frac{x}{\varkappa}-s-1\right)\ldots\left(\frac{x}{\varkappa}-s-n\right)}{n!}$$

in der Halbebene $\Re(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)<0$ absolut konvergent. Nach dem Satze Math. Zeitschr. 8, S. 111 Fußnote ist die oben ausgeführte gliedweise Integration zulässig.

Die Reihenkoeffizienten C_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ sind durch die Werte der Funktion y für $x=\varkappa(s+n)$ bestimmt. Die Punkte $x=\varkappa(s+n)$ liegen in der Konvergenzhalbebene $\Re(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)<0$; denn es ist $xe^{i\omega}=-\gamma(s+n)$, $\Re(xe^{i\omega})=-\gamma(s+n)<-\sigma(\omega)-(n-1)\gamma\leqq-\sigma(\omega)$ wegen $\gamma>\sigma(\omega)-1$. Aus der Reihe für y erhält man durch ν-malige Differenzenbildung unter der Annahme $\Delta\frac{x}{\varkappa}=1$

$$\Delta^{\nu}y=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+\nu}\frac{\left(\frac{x}{\varkappa}-s-1\right)\ldots\left(\frac{x}{\varkappa}-s-n\right)}{n!} \qquad (\nu=1, 2, \ldots);$$

setzt man hierin $x=\varkappa(s+1)$, so hat man $C_\nu=(\Delta^{\nu}y)_{x=\varkappa(s+1)}$, während $C_0=(y)_{x=\varkappa(s+1)}$ ist.

II.

In § 2 der oben genannten Arbeit im 8. Band sind die Laplaceschen Integrale, welche linearen Differentialgleichungen von der Form (D) genügen, in *Gammaquotientenreihen* entwickelt worden. Hierbei ist ein Fehler zu verbessern, auf welchen bereits im 13. Band, S. 272f. hingewiesen wurde.

In Band 8, S. 108—112 ist folgendes zu ändern. Wie $|\varphi(t)|$ auf S. 108/9 kann man auch $|\varphi'(t)|$ abschätzen. Im Sektor S ist

$$|v'(z)|<C_1e^{(\sigma+\delta)|z|},$$

im Gebiet G

$$|v'(z)|<D_1|t|^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\varepsilon}.$$

Nun ist

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\varkappa t}v'(z),$$

folglich im Kreis $\mathfrak{K}$ der t-Ebene, wenn $\frac{D_1}{D} = D'$ gesetzt wird,

$$|\varphi'(t)| < D'|t|^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\varepsilon-1}.$$

Indem man auf S. 109 an $\varphi'(t)$ statt an $\varphi(t)$ anknüpft, schließt man so. Aus

$$\varphi'(t) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+\frac{n}{k}-1\right)B_n(1-t)^{r+\frac{n}{k}-2}$$

bildet man

$$\psi(t) = t^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon}(1-t)^{2-r}\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty}K_n(1-t)^{\frac{n}{k}},$$

eine für $|t-1|<1$ reguläre Funktion von $(1-t)^{\frac{1}{k}}$. Für $0<\varrho\leqq|t-1|\leqq 1$ ist

$$|\psi(t)| < D'|(1-t)^{2-r}|\cdot|t|^{\varepsilon-1} < Q'|t|^{\varepsilon-1},$$

wenn $D'|(1-t)^{1-r}| < Q'$ ist. Für $|t-1|<\varrho$ liegt $|\psi(t)|$ unter einer endlichen Schranke E'; wenn $2^{1-\varepsilon}E' < Q'$ ist, ist wegen $|t|<2$

$$|\psi(t)| < Q'\cdot 2^{\varepsilon-1} < Q'|t|^{\varepsilon-1}.$$

Wenn man $u=(1-t)^{\frac{1}{k}}$ setzt, geht $\psi(t)$ in

$$\chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty}K_n u^n$$

über; man hat (a. a. O. S. 110) $|K_n| < K$. Setzt man

$$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+1=\alpha,$$

so ist $\alpha>1$ und

$$t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-2\varepsilon} = (1-(1-t))^{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+n-2}{\alpha}(1-t)^n.$$

Demnach ist

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+\frac{n}{k}-1\right)B_n(1-t)^{\frac{n}{k}} = (1-t)^{2-r}\varphi'(t)$$

$$= t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-2\varepsilon}\psi(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{\alpha+\lambda-2}{\lambda}(1-t)^{\lambda}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty}K_\mu(1-t)^{\frac{\mu}{k}}.$$

also

$$-\left(r+\frac{n}{k}-1\right)B_n = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}\binom{\alpha+\lambda-2}{\lambda}K_{n-\lambda k},$$

$$\left|r+\frac{n}{k}-1\right|\cdot|B_n| \leqq K\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}\binom{\alpha+\lambda-2}{\lambda} = K\binom{\alpha+\left[\frac{n}{k}\right]-1}{\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$= K\frac{\Gamma\left(\alpha+\left[\frac{n}{k}\right]\right)}{\Gamma\left(1+\left[\frac{n}{k}\right]\right)\Gamma(\alpha)} \leqq K\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{n}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\Gamma(\alpha)}$$

$$= K\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+1+\frac{n}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+1\right)},$$

$$|B_n| \leqq \frac{K(1+\delta')}{\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+1\right)}\cdot\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-1}\cdot(1+\delta''), \quad \lim_{n=\infty}\delta'=0.$$

Nach dieser Abschätzung von $|B_n|$ ergibt sich die Entwicklung von y in eine Gammaquotientenreihe wie a. a. O. S. 110—112.

Die Koeffizienten C_n der Binomialkoeffizientenreihe im I. Abschnitt lassen sich folgendermaßen durch die Koeffizienten B_n der Gammaquotientenreihe ausdrücken. Unter Benutzung der Reihenentwicklung (a. a. O. S. 108)

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu(1-t)^{r+\frac{\nu}{k}-1},$$

die bei hinreichend großem γ für $0<t\leqq 1$ gilt, hat man

$$C_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\varkappa}\int_0^1\varphi(t)\,t^s(1-t)^n\,dt$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu\int_0^1(1-t)^{r+n+\frac{\nu}{k}-1}t^s\,dt$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu\frac{\Gamma\left(r+n+\frac{\nu}{k}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(r+n+\frac{\nu}{k}+s+1\right)}.$$

Die gliedweise Integration ist zulässig, weil die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|B_\nu|\int_0^1|(1-t)^{r+n+\frac{\nu}{k}-1}|\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}|B_\nu|\int_0^1(1-t)^{\Re(r)+n+\frac{\nu}{k}-1}dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}|B_\nu|\frac{\Gamma\left(\Re(r)+n+\frac{\nu}{k}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\Re(r)+n+\frac{\nu}{k}+s+1\right)}$$

absolut konvergiert; für große ν ist nämlich

$$|B_\nu| \sim \text{Konst.}\, \nu^{\frac{\sigma}{\gamma}+2\varepsilon-1}, \qquad \left|\frac{\Gamma\left(\Re(r)+n+\frac{\nu}{k}\right)}{\Gamma\left(\Re(r)+n+\frac{\nu}{k}+s+1\right)}\right| \sim \text{Konst.}\, \nu^{-s-1},$$

so daß sich der absolute Betrag des allgemeinen Reihengliedes wie $\nu^{-2-s+\frac{\sigma}{\gamma}+2\varepsilon}$ verhält; wegen $s > \frac{\sigma}{\gamma} - 1$ ist der Exponent von ν kleiner als -1.

III.

In der Arbeit „Über eine Klasse linearer Differentialgleichungen“ (Math. Ann. **55** (1898), S. 525—556)[3]) habe ich vermittels der Laplaceschen Transformation in der Form von Poincaré die Integrale einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten in der ganzen Umgebung der Unbestimmtheitsstelle vom Rang 1 untersucht. Die linearen Beziehungen zwischen denjenigen Integralen, welche bei der Annäherung an die Stelle $x = \infty$ ein ausgezeichnetes Verhalten zeigen, folgen dabei aus den Übergangssubstitutionen der Laplaceschen transformierten Differentialgleichung.

In der Abhandlung „Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires“ (Journ. de math. 1919, S. 99—200)[4]) betrachtet Garnier eine allgemeinere lineare Differentialgleichung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ als Grenzfall einer linearen Differentialgleichung mit singulären Stellen der Bestimmtheit, welche ins Unendliche rücken. Dabei gehen die Substitutionen der Monodromiegruppe der letzteren Differentialgleichung in die Beziehungen zwischen den ausgezeichneten Integralen (relations de structure) der Differentialgleichung mit Unbestimmtheitsstelle über.

Hier möge für eine Differentialgleichung (D) unter Beschränkung auf die zweite Ordnung gezeigt werden, daß die *Beziehungen zwischen den ausgezeichneten Integralen* hergeleitet werden können, wenn man diese als *Laplacesche Integrale* (oder als Fakultäten- oder Gammaquotientenreihen oder als Binomialkoeffizientenreihen) darstellt, ohne daß als Laplacesche Transformierte eine Differentialgleichung zu erscheinen braucht.

---

[3]) Vgl. auch meine Arbeit im 49. Bd. der Math. Ann.

[4]) Vgl. auch die Arbeiten von Garnier in den Comptes rendus **164** (1917), S. 265; **166** (1918), S. 103, 602; **168** (1919), S. 142, 452; **169** (1919), S. 223.

Die Differentialgleichung

$$(D_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1\frac{dy}{dx} + P_2 y = 0,$$

$$P_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x^{\frac{1}{k}}} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^{\frac{2}{k}}} + \dots \qquad (\mu = 1, 2),$$

wird, wenn die charakteristische Gleichung $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ zwei verschiedene Wurzeln α_1, α_2 besitzt, durch zwei im allgemeinen divergente Reihen

$$y = S = e^{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+\frac{n}{k}}}$$

formal befriedigt; dabei ist

$$g(x) = \alpha x + \alpha^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \dots + \alpha^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}$$

und α eine der Zahlen α_1, α_2. Durch die Laplacesche Transformation

$$y = e^{g(x)} \int_0^\infty v(z)\, e^{zx}\, dz$$

erhält man eine Integralgleichung

$$(z^2 + a_1 z)\, v(z) = \int_0^z [G_1(z-\zeta)\,\zeta + G_2(z-\zeta)]\, v(\zeta)\, d\zeta;$$

dabei ist

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_\mu^{(\lambda)} (-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \qquad (\mu = 1, 2)$$

abgesehen von $z = 0$ beständig konvergent. Die eingeführten Größen sind mit dem Index $i = 1, 2$ zu versehen, je nachdem man von $\alpha = \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ ausgeht. Wir nehmen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, $\alpha_2 - \alpha_1$ als reelle positive Größe an. Dann hat v_1 nur die auf der positiven reellen Achse gelegenen singulären Stellen $0, \alpha_2 - \alpha_1$ und v_2 nur die auf der negativen reellen Achse gelegenen singulären Stellen $0, \alpha_1 - \alpha_2$. Wir setzen

$$\eta_1 = e^{g_1(x)} \int_0^\infty v_1(z)\, e^{zx}\, dz$$

mit dem Integrationsweg $\arg z = \omega_1$ und

$$\eta_2 = e^{g_2(x)} \int_0^\infty v_2(z)\, e^{zx}\, dz$$

mit dem Integrationsweg $\arg z = \omega_2$. Wir haben die ausgezeichneten Integrale

$$\eta_1 = \eta_1^{(p)} \quad \text{für} \quad 2p\pi < \omega_1 < 2(p+1)\pi,$$
$$\eta_2 = \eta_2^{(p)} \quad \text{„} \quad (2p-1)\pi < \omega_2 < (2p+1)\pi;$$

dabei ist p gleich Null oder gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl; zwei Werte von p, die mod k kongruent sind, werden nicht als verschieden betrachtet. Es sind demnach je k ausgezeichnete Integrale $\eta_1^{(p)}$ und $\eta_2^{(p)}$ vorhanden. Es gelten die asymptotischen Gleichungen $\eta_1^{(p)} \sim S_1$ für $-\frac{3\pi}{2} - 2p\pi < \arg x < \frac{3\pi}{2} - 2p\pi$ und $\eta_2^{(p)} \sim S_2$ für $-\frac{\pi}{2} - 2p\pi < \arg x < \frac{5\pi}{2} - 2p\pi$. In dem Gebiet $-\frac{\pi}{2} - 2p\pi < \arg x < \frac{\pi}{2} - 2p\pi$, in welchem die drei Funktionen $\eta_1^{(p)}, \eta_2^{(p)}, \eta_2^{(p+1)}$ ausgezeichnete Integrale sind, besteht zwischen diesen eine lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten

$$A\eta_2^{(p+1)} + B\eta_2^{(p)} + C\eta_1^{(p)} = 0.$$

Für $\arg x = -2p\pi$ ist

$$\eta_1^{(p)} = e^{g_1(x)} x^{-r_1}(1+\varepsilon_1), \qquad \eta_2^{(p)} = e^{g_2(x)} x^{-r_2}(1+\varepsilon_2),$$

für $\arg x = -2(p+1)\pi$

$$\eta_2^{(p+1)} = e^{g_2(x)} x^{-r_2}(1+\bar{\varepsilon}_2),$$

also, wenn $\arg x = -2p\pi$ angenommen wird,

$$\eta_2^{(p+1)} = e^{g_2(x)} x^{-r_2} \cdot e^{2\pi i r_2}(1+\bar{\varepsilon}_2);$$

dabei ist $\lim \varepsilon_1 = 0$, $\lim \varepsilon_2 = 0$, $\lim \bar{\varepsilon}_2 = 0$ für $\lim x = \infty$. Multipliziert man die obige lineare Beziehung mit $e^{-g_1(x)} x^{r_1}$ und nimmt man den Grenzübergang $\lim x = \infty$ vor, so hat man

$$Ae^{2\pi i r_2} + B = 0.$$

Es ist also

$$\eta_2^{(p+1)} - e^{2\pi i r_2}\eta_2^{(p)} = a\eta_1^{(p-1)},$$

wo a eine Konstante ist, zu deren Bestimmung man für x einen hinreichend großen reellen positiven Wert einsetzt. Zur Berechnung verwendet man die Laplaceschen Integralausdrücke für $\eta_1^{(p)}$ mit dem Integrationsweg $\arg z = \pi - 2p\pi$, für $\eta_2^{(p)}$ mit dem Integrationsweg $\arg z = \pi - \delta - 2p\pi$ und für $\eta_2^{(p+1)}$ mit dem Integrationsweg $\arg z = -\pi + \delta - 2p\pi$, wobei $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ist. An Stelle der Laplaceschen Integrale kann man die mit den angegebenen Werten von $\omega = \arg z$ berechneten Gammaquotienten- oder Binomialkoeffizientenreihen benutzen. — Ähnlich findet man die für $\frac{\pi}{2} - 2p\pi < \arg x < \frac{3\pi}{2} - 2p\pi$ gültige Beziehung

$$\eta_1^{(p-1)} - e^{-2\pi i r_1}\eta_1^{(p)} = b\eta_2^{(p)},$$

wo zur Bestimmung der Konstanten b ein reeller negativer Wert x von hinreichend großem Betrag einzusetzen ist.

Anmerkung. Auch vermittels der Methode sukzessiver Näherungen kann man die Integrale einer linearen Differentialgleichung in der ganzen Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle untersuchen. Ich habe dies zuerst für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Rang 1[5]) und später für eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung und beliebigen Ranges[6]) gezeigt. Mit dieser Methode lassen sich auch die Beziehungen zwischen den ausgezeichneten Integralen herleiten[7]).

---

[5]) Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires (Comptes rendus **126** (1898), S. 205—208). — Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittels sukzessiver Annäherungen (Arch. d. Math. u. Phys. (3) **4** (1901), S. 214—230).

[6]) Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen (Journ. f. Math. **133** (1907), S. 19—67).

[7]) Garnier integriert zunächst seine Hilfsdifferentialgleichung mit singulären Stellen der Bestimmtheit vermittels sukzessiver Näherungen; nimmt man den Grenzübergang zur Differentialgleichung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ vor, so gelangt man zu der Methode, wie ich sie im Bd. 133 des Journ. f. Math. auf eine Differentialgleichung mit Unbestimmtheitsstelle unmittelbar angewandt habe; im Falle der Differentialgleichung zweiter Ordnung habe ich dieselben krummlinigen Integrationswege benutzt wie später Garnier. Gegenüber der Angabe von Garnier (Journ. de math. 1919, S. 103), daß Picard (Traité d'Analyse, 2. éd., t. III, 1908, p. 412) als erster die Methode der sukzessiven Näherungen zur Berechnung der Integrale einer irregulären Differentialgleichung benutzt habe, sei auf meine Note in den Comptes rendus vom 7. Jan. 1898 hingewiesen. Im Journ. de math. a. a. O. sind zwei meiner Arbeiten angeführt, aber gerade die Arbeit im 133. Bd. des Journ. f. Math. ist nicht berücksichtigt; daß ich nur geradlinige Integrationswege benutzt hätte, trifft hiernach nicht zu; zur Betrachtung von Sektoren bin ich schon 1897 durch die Laplacesche Transformation sowie später auch durch die Methode der sukzessiven Näherungen geführt worden.

(Eingegangen am 16. November 1923.)

Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation.

Von

Ch. H. Müntz in Göttingen.

I. Umkehrung bestimmter Integrale.

Das alte klassische Problem der Umkehrung bestimmter Integrale mit festen endlichen Grenzen:

$$(1) \qquad \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt = f(s); \qquad a \leqq s,t \leqq b,$$

[Kern $K(s,t)$ beliebig gegeben, $g(t)$ aus $f(s)$ gesucht]

hat zuerst für *abgeschlossene* Kerne, bei denen $f(s) \equiv 0$ nur für $g(t) \equiv 0$ möglich wäre, eine indirekte Erledigung bei Picard[1]) gefunden; die gleiche indirekte Auflösung ist dann von Lauricella[2]) auch auf „offene" Kerne übertragen worden, für die also die homogene Gleichung

$$(2) \qquad \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt = 0$$

eine von Null verschiedene Lösung zuläßt. Es erwies sich, daß selbst bei stetigen Ausgangsfunktionen die gesuchte Lösung im allgemeinen erst dem Bereiche der *quadratisch summierbaren* Funktionen angehört; aus diesem Grunde soll dieser Bereich im folgenden von vornherein der Untersuchung zugrunde gelegt werden.

Die Picard-Lauricellasche Methode setzt die *explizite Kenntnis* aller adjungierten Eigenfunktionen $\varphi_m(s)$ und $\psi_m(t)$ von $K(s,t)$ in der klassisch gewordenen Bezeichnungsweise von E. Schmidt[3]) voraus. Die konsekutive Bestimmung dieser Eigenfunktionen war durch das Iterations-

[1]) Comptes Rendus 1909.

[2]) Atti Acc. Lincei 1909.

[3]) Math. Annalen 63 (1907), §§ 14–15.

und Abspaltungsverfahren von Schmidt (l. c. §§ 8, 11) zwar als stets ausführbar nachgewiesen — allein der enorme Arbeitsaufwand hierzu, sowie die Undurchsichtigkeit der rein formal definierten Resultate ließen die Lösung von (1) auf solchem Umwege als nicht befriedigend erscheinen.

Es versuchten daher Herr Vergerio[4]) und im Anschluß an ihn Herr Mollerup[5]) eine andere Methode auszubauen, bei der das Schmidtsche Verfahren direkt auf (1) selbst übertragen wird; immer noch ist dabei eine unendliche Folge von einander *konsekutiv bedingenden* unendlichen Grenzprozessen dreierlei Art (Iteration, Bestimmung von Eigenfunktionen, Berechnung von Fourierkonstanten) vorzunehmen, bevor die Bedingungen der Lösbarkeit und die Lösung kleinster Norm [= Minimallösung] gegeben werden können.

In der älteren Literatur wurde die Existenz einer spiegelgetreuen Umkehrung von (1):

$$\int_c^d H(s,t)\,f(s)\,ds = g(t) \tag{3}$$

vermutet und vergeblich nach einer solchen gesucht[6]); der „lösende Kern" $H(s,t)$ sollte dabei nur von $K(s,t)$ abhängen. Tatsächlich waren wenigstens für *unendliche* Integrationswege ähnliche direkte Umkehrungen vielfach bekannt (Fourier-, Besselintegrale usf.); auch die sonstige Theorie der Integralgleichungen bot analoge Lösungen. Vor kurzem hat aber Verasser[7]) zeigen können, daß bei festen *endlichen* Grenzen ein lösender Kern $H(s,t)$ nur dann wirklich existiert, wenn der Ausgangskern $K(s,t)$ *ausgeartet* (finit) ist, also in der Gestalt

$$K(s,t) = \sum_{m=1}^{M} p_m(s)\,q_m(t)$$

geschrieben werden kann; in der gleichen Arbeit war dann unter Heranziehung der Theorie der Orthogonalsysteme eine auf wenige Zeilen reduzierte Auflösung von (1) [und von (2)] gegeben, bei der nur der Gebrauch willkürlicher, der Aufgabe an sich fremder, vollständiger Orthogonalsysteme methodisch störend erscheinen konnte.

Auch dies soll im folgenden noch behoben werden. Es stellt sich heraus, daß schon der *erste* einfache Iterationsprozeß der Vergerio-Mollerupschen Methode *allein* bei Anwendung der Theorie der Orthogonalsysteme zur expliziten Angabe der Minimallösung ausreicht, wodurch das betrachtete Problem eine überaus einfache, auch praktisch brauchbare

[4]) Rend. Circ. Mat. Palermo 1916.
[5]) Rend. Circ. Mat. Palermo 1923.
[6]) Encykl. d. Math. Wiss. II A 11, § 28.
[7]) Math. Annalen 87 (1922), S. 139—149.

Beantwortung erhält (§§ 1—3). Der gleiche erste Iterationsprozeß liefert in durchsichtiger Weise auch alle zugehörigen adjungierten Eigenfunktionen und -werte (§ 4).

§ 1.

Die Lösung.

Man bilde für (1) mit den unter [4]) und [5]) genannten Autoren die aus

$$f(s) = f_0(s)$$

explizit bestimmte Folge[8]):

$$(4)\qquad \begin{aligned} g_1(t) &= \int f_0(s) K(s,t)\, ds, \qquad f_1(s) = \int K(s,t) g_1(t)\, dt; \ldots \\ g_n(t) &= \int f_{n-1}(s) K(s,t)\, ds, \qquad f_n(s) = \int K(s,t) g_n(t)\, dt; \\ &(n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Läßt (1) überhaupt eine Lösung[9]) zu, so hat man daraus mit lauter explizit bestimmten Konstanten c_{n-1}:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\int g(t) g_n(t)\, dt \\ &= \iint f_{n-1}(s) K(s,t) g(t)\, ds\, dt = \int f(s) f_{n-1}(s)\, ds = c_{n-1}. \end{aligned}$$ [10])

Durch Orthogonalisierung und Normierung erhält man aus den Systemen $f_n(s)$ bzw. $g_n(t)$ die somit *bekannten* Folgen:

$$f_1^*(s), \ldots, \quad f_n^*(s), \ldots; \quad g_1^*(t), \ldots, \quad g_n^*(t), \ldots,$$

und daraufhin ohne neue Quadraturen, durch entsprechende lineare Kombinationen der c_{n-1} allein:

$$(5^*)\qquad \int f(s) f_n^*(s)\, ds = a_n; \qquad \int g(t) g_n^*(t)\, dt = b_n,$$

mit lauter *bekannten* a_n, b_n.

Es gilt dann der folgende

Hauptsatz. *Damit eine Lösung von* (1) *existiert, ist notwendig und hinreichend:*

---

[8]) Wir bewegen uns hier stets im Bereiche der quadratisch summierbaren Funktionen, die Integrale sind daher Lebesguesch zu verstehen; die konstanten Integrationsgrenzen a, b werden überall als selbstverständlich fortgelassen.

[9]) D. h. eine quadratisch summierbare Lösung; auf mögliche Erweiterungen sei hier nur hingewiesen.

[10]) Allgemeiner läßt sich leicht feststellen:

$$(\bar{5})\qquad \int g_m(t) g_n(t)\, dt = \int f_{p-1}(s) f_{m+n-p}(s)\, ds = c_{m+n-1},$$

wodurch die weiter folgenden Orthonormierungen sehr vereinfacht werden.

a) *das Bestehen der Identität*

5a) $$\int f(s)^2\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

b) *die Konvergenz der Summe*

5b) $$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \quad d.\,h. \quad B < \infty;$$

ind aber diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist die Lösung kleinster Norm (Minimallösung) gegeben durch

6) $$g_0(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n^*(t),$$

obei das Äquivalenzzeichen im Sinne der Konvergenz im Mittel zu erstehen ist.

§ 2.

Beweis von a) und b).

Es seien gemäß der bekannten Theorie von Schmidt:

7) $$\Phi(s,t) = \int K(s,u)K(t,u)\,du, \qquad \Psi(s,t) = \int K(v,s)K(v,t)\,dv$$

ie beiden iterierten Symmetralkerne zum gegebenen $K(s,t)$, λ_m^2 ihre mtlichen (gemeinsamen) Eigenwerte, die $(1+k)$-fachen $(1+k)$-fach gechnet, $\varphi_m(s)$ bzw. $\psi_m(t)$ die zugehörigen adjungierten Eigenfunktionen[11]. an hat also:

$$\int \varphi_m(s)^2\,ds = \int \psi_m(t)^2\,dt = 1, \qquad \int \varphi_m(s)\varphi_n(s)\,ds = \int \psi_m(t)\psi_n(t)\,dt = 0;$$

$$\int \varphi_m(s)K(s,t)\,ds = \lambda_m^{-1}\psi_m(t), \qquad \int K(s,t)\psi_m(t)\,dt = \lambda_m^{-1}\varphi_m(s);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-2} = \int\int K(s,t)^2\,ds\,dt < \infty.$$

Nach den im Bereiche der quadratisch summierbaren Funktionen benntermaßen völlig gültig bleibenden Schmidtschen Entwicklungssätzen es ist nur das Äquivalenz- an Stelle des Gleichheitszeichens zu gebrauchen — uß $f(s)$, sobald es durch (1) tatsächlich dargestellt werden kann, dem nearen Raume φ aus allen Funktionen $\varphi_m(s)$ *angehören*, also durch die zteren (wegen ihrer Orthogonalität) in mittelkonvergenter Weise linear rstellbar sein. Die zugehörigen Fourierkonstanten („Momente") seien

) $$\alpha_m = \int f(s)\varphi_m(s)\,ds,$$

[11]) Die explizite Kenntnis derselben (und der λ_m^2) wird *nicht* vorausgesetzt, sie nen lediglich als Hilfsmittel des Beweises.

und demnach:

$$(8_*) \qquad f(s) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \varphi_m(s);$$

ohne jede Einschränkung der Allgemeinheit darf dabei angenommen werden, daß zu jeder vollständigen Gruppe von gleichen Eigenwerten

$$\lambda_{m_i} = \ldots = \lambda_{m_i+k} = \ldots = \lambda_{m_i+k_i}$$

höchstens nur α_{m_i} von Null verschieden ausfällt — anderenfalls braucht man nämlich bloß die betreffende Teilsumme

$$\overline{\varphi}_{m_i}(s) = \sum_{k=0}^{k_i} \alpha_{m_i+k} \varphi_{m_i+k}(s),$$

nach erfolgter Normierung zu $\varphi^*_{m_i}(s)$, selbst als Eigenfunktion der gleichen Gruppe an Stelle von $\varphi_{m_i}(s)$ zu setzen und die φ_{m_i+k} dementsprechend neu zu orthonormieren. Wir schreiben daher:

$$(8^*) \qquad f(s) \sim \sum \alpha^*_m \varphi^*_m(s),$$

um anzudeuten, daß jeder (ein- oder mehrfache) Eigenwert λ^*_m mit höchstens einer einzigen Eigenfunktion vertreten ist, die Indizes mit $\alpha_m = 0$ aber überdies *fortgelassen* werden. Wir behaupten nun:

Hilfssatz. *Jede dem Raume f^* aller $f^*_n(s)$ angehörende Funktion $f^*(s)$ gehört auch dem Raume φ^* aller $\varphi^*_m(s)$ an und umgekehrt.* —

Aus (8*) und (5*) würde dann folgen

$$(8a) \qquad f(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n f^*_n(s)$$

und damit die in Frage stehende Bedingung (5a).

Beweis. Die gliedweise Integration mittelkonvergenter Entwicklungen nach Multiplikation mit einer quadratisch summierbaren Funktion ist stets erlaubt[12]). In Anschluß an (8*) und (7*) folgt daher durch vollständige Induktion aus (4):

$$(8b) \qquad g_n(t) \sim \sum \alpha^*_m \lambda^{*-2n+1}_m \psi^*_m(t); \qquad f_n(s) \sim \sum \alpha^*_m \lambda^{*-2n}_m \varphi^*_m(s).$$

Ist nun eine Funktion $\varphi(s)$, die wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als *normiert* ansehen wollen, zu allen $\varphi^*_m(s)$ orthogonal, so liefert die (wiederum statthafte, v. o.) gliedweise Integration mit $\varphi(s)\,ds$ für alle n

$$(8c) \qquad \int f_n(s) \varphi(s)\, ds = 0,$$

also auch, wegen der Bedeutung der $f_n(s)$ aus § 1:

$$(8d) \qquad \int f^*_n(s) \varphi(s)\, ds = 0,$$

[12]) Man vergleiche etwa die kurze Zusammenfassung in Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris 1912, Kap. IV.

womit der *erste* Teil unseres Hilfssatzes, als mit (8d) völlig äquivalent, erledigt ist.

Um auch die Umkehrung zu beweisen, gehen wir von (8d), oder — was dasselbe ist — von (8c) als gegeben aus. Die Ausführung von (8c) auf Grund von (8b) ergibt dann, wenn allgemein

$$\int \varphi_m^*(s)\,\varphi(s)\,ds = \beta_m^* \tag{9}$$

genannt wird:

$$0 = \sum \alpha_m^*\,\lambda_m^{*-2n}\,\beta_m^*. \tag{9*}$$

Wegen der Normiertheit von $\varphi_m^*(s)$ und $\varphi(s)$ folgt aus (9) stets $|\beta_m^*| \leqq 1$; wegen der Konvergenz von $\Sigma \alpha_m^{*2}$ $[= \int f(s)^2\,ds$ aus (8*)] und $\Sigma \lambda_m^{-2}$ [s. (7*)] konvergiert auch $\Sigma |\alpha_m^*\,\lambda_m^{*-1}|$. Die rechte Seite von (9_*) läßt sich daher als allgemeine Dirichletsche Reihe für die Variable n auffassen, die für $\Re\, n > \frac{1}{2}$ regulär ist und nun für die ins Unendliche wachsende Folge aller positiv ganzzahligen n verschwinden soll; dies kann bekanntermaßen nur dann eintreten, wenn stets

$$\alpha_m^*\,\beta_m^* = 0, \quad \text{d. h.} \quad \beta_m^* = 0 \quad [\text{wegen } \alpha_m^* \neq 0] \tag{9*}$$

ausfällt, was aber gerade für (9) gezeigt werden mußte. Auch der zweite Teil des Hilfsatzes ist so bewiesen, und damit die Bedingung a) des Hauptsatzes als notwendig sichergestellt.

Die Bedingung b) aber — ibd. — ist eine einfache Folge von (5*) und dem Verlangen nach *quadratischer* Summierbarkeit der Lösung.

§ 3.

Hauptbeweis.

Die Erfüllung von (5b) zieht die Existenz einer durch die — alsdann sicher mittelkonvergente — Entwicklung (6) definierten Funktion $g_0(t)$ nach sich, von der jetzt gezeigt werden soll, daß sie eine Lösung von (1) darstellt.

Wir setzen zunächst

$$\int K(s,t)\,g_0(t)\,dt = \tilde{f}(s); \tag{10}$$

infolge von (6) sowie der Definition der $g_n^*(t)$ in § 1 hat man nunmehr:

$$\int g_0(t)\,g_n^*(t)\,dt = b_n; \quad \int g_0(t)\,g_n(t)\,dt = c_{n-1}, \tag{10*}$$

demnach:

$$\begin{aligned} \int \tilde{f}(s)\,f_{n-1}(s)\,ds &= \int\int f_{n-1}(s)\,K(s,t)\,g_0(t)\,ds\,dt \\ &= \int g_0(t)\,g_n(t)\,dt = c_{n-1}, \end{aligned} \tag{10*}$$

und daraus, wegen der Definition der $f_n^*(s)$ in § 1, schließlich:

$$\int \tilde{f}(s) f_n^*(s)\, ds = a_n = \int f(s) f_n^*(s)\, ds. \tag{10a}$$

Es sei nun $\varphi_\mu(s)$ irgendeine der in (8*) etwa *nicht* vertretenen Eigenfunktionen von $\Phi(s,t)$, $\psi_\mu(t)$ die entsprechende (adjungierte) Eigenfunktion von $\Psi(s,t)$; nach (8b) stimmt der lineare Funktionenraum ψ^* aller $\psi_m^*(t)$ mit demjenigen aller $g_n^*(t)$ genau ebenso überein, wie dies für den Raum φ^* der $\varphi_m^*(s)$ und denjenigen aller $f_n^*(s)$ bereits bewiesen worden ist (§ 2); das erhaltene $\psi_\mu(t)$ ist daher, als zu jedem $\psi_m^*(t)$ orthogonal, auch orthogonal zu jedem $g_n^*(t)$ und somit — wegen (6) — zu $g_0(t)$ selbst. Die Integration von (10) mit $\varphi_\mu(s)\,ds$ ergibt also:

$$\begin{aligned} \int \tilde{f}(s)\varphi_\mu(s)\,ds &= \iint \varphi_\mu(s) K(s,t) g_0(t)\,dt \\ &= \lambda_\mu^{-1} \int g_0(t)\psi_\mu(t)\,dt = 0 = \int f(s)\varphi_\mu(s)\,ds, \end{aligned} \tag{10b}$$

letzteres wegen (8*). Der Raum f^* aller $f_n^*(s)$ ist mit dem Raume φ^* aller $\varphi_m^*(s)$ identisch (§ 2); der Raum $f^* + \varphi_\mu$ aller $f_n^*(s)$ und $\varphi_\mu(s)$ stimmt also mit demjenigen aller $\varphi_m^*(s)$ und $\varphi_\mu(s)$, d. h. mit dem Raume φ *aller* Eigenfunktionen $\varphi_m(s)$ überein. Letzterem gehören nach dem Entwicklungssatz sowohl $f(s)$ [wegen (1)] als auch $\tilde{f}(s)$ [wegen (10)] an, und beide Funktionen besitzen in bezug auf ein in diesem Raume abgeschlossenes System von Orthogonalfunktionen $[f_n^*(s),\ \varphi_\mu(s)]$ die gleichen Fourierkonstanten [vgl. (10a), (10b)], stimmen also, nach bekannten Sätzen, abgesehen etwa von belanglosen Nullmengen des Argumentwertes, notwendig überein. Man hat daher tatsächlich

$$\tilde{f}(s) = f(s), \tag{10c}$$

w. z. b. w.

Daß $g_0(t)$ dann auf alle Fälle die *Minimal*lösung (mit kleinstem Integral über dem Quadrat der Funktion) darstellt, ersieht man aus (6) und (5*); etwaige weitere Lösungen sind natürlich durch die homogene Gleichung (2) bestimmt, für die dann nach [7]) verfahren werden kann.

Ist die Bedingung b) allein erfüllt, a) aber nicht, so liefert $\tilde{f}(s)$ aus (10) die Orthogonalprojektion von $f(s)$ auf den Raum φ aller Eigenfunktionen $\varphi_m(s)$, statt $f(s)$ selbst.

§ 4.

Entwicklung nach Eigenfunktionen.

Bei dem in der Einleitung erwähnten Verfahren der Herren Vergerio-Mollerup erfolgt mittels unendlichvieler, einander sukzessiv bedingender, dreifacher unendlicher Grenzprozesse, deren jeder auf Grund von ∞^1 neuen Quadraturen auszuführen ist, in Anpassung an die bekannte Picard-

Lauricellasche Lösung, die explizite Bestimmung aller λ_m^{*2} (wachsend geordnet), $\alpha_m^* \varphi_m^*(s)$ und $\alpha_m^* \lambda_m^* \psi_m^*(t)$. Auch diese Aufgabe kann indessen in sehr einfacher Weise schon auf Grund der *ersten* solchen ∞^1 Quadraturen [des Iterationzprozesses (2)] mit erledigt werden.

Man betrachte für beliebig hohe N die Folgen:

$$f_N(s),\ f_{N+1}(s), \ldots, f_{N+m}(s), \ldots;\ m \to \infty, \tag{11}$$

und führe in jeder derselben — vgl. (10) — den Prozeß der Orthogonalisierung allein (ohne Normierung) durch zu

$$f_1^{(N)}(s) = f_N(s),\ f_2^{(N)}(s), \ldots, f_{m+1}^{(N)}(s), \ldots . \tag{11$_*$}$$

Die wachsend geordneten λ_m^{*2} sind nun gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} f_1^{(N+1)}(s) : f_1^{(N)}(s) = \lambda_1^{*-2}, \ldots, \\ &\lim_{N\to\infty} f_m^{(N+1)}(s) : f_m^{(N)}(s) = \lambda_m^{*-2}, \end{aligned} \tag{11λ}$$

von etwaigen Ausnahmewerten der Variablen s abgesehen. Weiter erhält man:

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \lambda_1^{*2N} f_1^{(N)}(s) = \alpha_1^* \varphi_1^*(s); \ldots, \\ &\lim_{N\to\infty} \lambda_m^{*2N} f_m^{(N)}(s) = (\lambda_m^{*-2} - \lambda_1^{*-2}) \ldots (\lambda_m^{*-2} - \lambda_{m-1}^{*-2}) \alpha_m^* \varphi_m^*(s), \end{aligned} \tag{11a}$$

[13]

und genau in der analogen Weise [oder nun aus (7*)] alle $\alpha_m^* \lambda_m^* \psi_m^*(t)$ unter Zugrundelegung der $g_0(t)$.

Die Bedingungen der Lösbarkeit von (1) sind hier:

$$\int f(s)^2\, ds = \sum \int \{\alpha_m^* \varphi_m^*(s)\}^2\, ds; \tag{11a}$$

$$\sum \int \{\alpha_m^* \lambda_m^* \psi_m^*(t)\}^2\, dt = B < \infty, \tag{11b}$$

und die Minimallösung wird ausgedrückt durch

$$g_0(t) = \sum \alpha_m^* \lambda_m^* \psi_m^*(t). \tag{12}$$

Die Beweise gestalten sich auf Grund von (8b) überaus einfach; es sei für die Einzelheiten auf die ganz analogen Ausführungen verwiesen, die Verfasser a. a. O.[14]) für die Bestimmung aller Eigenfunktionen und -werte eines beliebigen *symmetrischen* Kernes angestellt hat. Der jeweilige Arbeitsaufwand bei dieser Methode wird aber i. a. wesentlich höher sein als bei denjenigen von [7]) bzw. oben §§ 1—3.

---

[13]) Durch Normierung lassen sich so schon aus (11$_*$) für $N \to \infty$ auch alle Eigenfunktionen $\varphi_m^*(s)$ selbst gewinnen; der Raum φ_* der zu $f(s)$ orthogonalen $\varphi_\mu(s)$ scheidet dabei aus; die λ_m^* und $\psi_m^*(t)$ sind dann aus (7*), die α_m^* aus (8) bestimmt.

[14]) Göttinger Nachr. 1917; Prace mat.-fiz. 1918.

II. Dichte Funktionensysteme.

In der Theorie der Integralgleichungen begegnet man häufig dem folgenden Iterationsprozeß:

Es sei $\Phi(s,t) = \Phi(t,s)$ für $a \leqq s,t \leqq b$ ein gegebener symmetrischer Kern, $f(s)$ eine gegebene Funktion, beide als quadratisch summierbar vorausgesetzt, und man bilde alsdann die Folge

$$(13) \qquad f_n(s) = \int_a^b \Phi(s,t) f_{n-1}(t)\,dt \quad [15]; \qquad (n = 1, 2, \ldots \to \infty).$$

Derart entstehende Systeme besitzen nun eine sehr merkwürdige allgemeine Eigenschaft, die sie in der praktisch wichtigen Theorie der Approximationen beliebiger Funktionen durch Systeme vorgeschriebener als besonders ausgezeichnet erscheinen läßt.

Ist ein System $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... und eine Funktion $F(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ beliebig gegeben, so entsteht in der Theorie der Approximationen vor allem die Frage, ob $F(x)$ durch lineare Aggregate von der Form $\sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)} F_n(x)$ mit beliebig vorgeschriebener absoluter Fehlergrenze $\varepsilon > 0$ dargestellt werden kann $[N = N(\varepsilon),\ a_n^{(N)} = a_n^{(N)}(\varepsilon)]$. Die Antwort ist unter Umständen a priori bejahend, so z. B. bekanntlich für jede *stetige* Funktion $F(x)$ bei $F_n(x) = x^{n-1}$ (Weierstraß); es kann dann sein, daß auch schon gewisse, notwendig unendliche *Teil*folgen der $F_\nu(x)$ hierzu genügen — bei $F_n(x) = x^{n-1}$ ist z. B. nur notwendig und hinreichend, außer $F_1(x) = 1$ eine solche Folge $x^{\nu_1 - 1}$, $x^{\nu_2 - 1}$, ... auszuwählen, daß $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_p}$ divergiere [16].

Es existieren aber auch Funktionensysteme $F_n(x)$ solcher Art, daß *jede* unendliche Teilfolge aus ihnen imstande ist, jede beliebige stetige Funktion im gleichen endlichen Intervalle beliebig genau und gleichmäßig linear zu approximieren. (Verfasser hat dieses singuläre Verhalten zuerst bei den Bernoullischen Polynomen nachgewiesen [17].) Ein solches Funktionensystem wollen wir als *dicht* bezeichnen; man hat bei seiner Anwen-

---

[15]) Die Bezeichnungen im ersten Teil dieser Arbeit sind hierin mit enthalten.

[16]) Abhandlung Ch. H. Müntz, Schwarzfestschrift, Berlin 1914.

[17]) Comptes rendus 1914. Durch einen lapsus calami ist dort statt des Systems $P_{2k}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\cos \pi m x}{m^{2k}}$ für das Intervall $-\pi \leqq \pi x \leqq \pi$ das entsprechende $P_{2k}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{m^{2k}}$ für $0 \leqq 2\pi x \leqq 2\pi$ vorangestellt; die durch den Krieg seinerzeit verhinderte Berichtigung sei hiermit nachgeholt.

dung den Vorzug, beliebig wählbare Teilfolgen zur Approximation einer gegebenen Funktion heranziehen zu können.

Im allgemeinen wird ein vorgeschriebenes System

$$F_n(x), \quad a \leqq x \leqq b; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

nur eine gewisse, eben dadurch bestimmte, *Klasse* von Funktionen $F(x)$ im gleichen Intervall zu approximieren imstande sein. Auch dann kann noch der Fall eintreten (§ 6), daß jede Funktion $F(x)$, die durch die *Gesamtheit* aller $F_n(x)$ approximierbar ist, diese Eigenschaft auch gegenüber *jeder* unendlichen *Teil*folge der $F_n(x)$ beibehält: in diesem Falle nennen wir das System der $F_n(x)$ ebenfalls *dicht*.

Der vorliegende zweite Teil unserer Ausführungen soll nun dem Nachweis der Tatsache dienen, daß durch unbestimmte Integration der durch (13) gegebenen Iterationen $f_n(s)$ für $a < a' \leqq x \leqq b$ ein stets *dichtes* Funktionensystem

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(s)\,ds \tag{14}$$

entsteht. Die Bernoullischen Funktionen sind hierin als Spezialfall mit enthalten (§ 7).

§ 5.

Die „quadratische" Dichtigkeit der $f_n(s)$.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Satz. *Es sei* $f_{\nu_1}(s), \ldots, f_{\nu_p}(s), \ldots$ *eine ganz beliebige unendliche Teilfolge aus den* $f_n(s)$; *jede Funktion* $f_*(s)$, *die dem Raume aller* $f_n(s)$ *angehört, gehört auch dem Teilraume aller* $f_{\nu_p}(s)$ *an.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist selbstverständlich: eine Funktion im Teilraume $f_{\nu_p}(s)$ gehört gewiß auch dem Gesamtraume *aller* $f_n(s)$ an; der Satz selbst klingt aber eher paradox, da die Identität jenes Gesamtraumes mit *jedem* der durch die $f_{\nu_p}(s)$ aufgespannten Teilräume behauptet wird. Zum Beweise stellen wir den folgenden Hilfssatz auf:

Jede einzelne der ursprünglichen Funktionen $f_n(s)$ liegt bereits im gewählten Teilraum der $f_{\nu_p}(s)$.

Nach der bekannten allgemeinen Theorie der Orthogonalsysteme genügt es, hierzu zu zeigen, daß eine (quadratisch summierbare) Funktion $h(s)$, die zu allen gewählten $f_{\nu_p}(s)$ orthogonal ist, diese Eigenschaft auch gegenüber dem betrachteten $f_n(s)$ besitzt.

Es mögen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_m(s), \ldots$ ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen des Kernes $\Phi(s,t)$ bilden; $l_1, \ldots, l_m, \ldots$ seien die zugehörigen Eigenwerte; eine etwa noch mögliche Ergänzung des φ-Systems zu einem

vollständigen sei durch $\Phi_1(s), \ldots$ gegeben. Die ursprüngliche Funktion $f_0(s) = f(s)$ besitzt dann eine mittelkonvergente Entwicklung

$$(15) \qquad f(s) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \varphi_m(s) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathsf{A}_\mu \Phi_\mu(s),$$

und man darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in der ersten dieser Summen jeder Eigenwert l, auch wenn er mehrfach ist, höchstens mit nur einer einzigen Eigenfunktion vertreten ist (vgl. § 2).

Für den Kern selbst gilt bekanntlich:

$$(15_*) \qquad \Phi(s,t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} l_m^{-1} \varphi_m(s) \varphi_m(t);$$

man hat so auf Grund statthafter (vgl. § 2) gliedweiser Integration und vollständiger Induktion aus (13) allgemein

$$(15^*) \qquad f_n(s) \sim \sum \alpha_m l_m^{-n} \varphi_m(s),$$

wobei etwaige Glieder mit $\alpha_m = 0$ einfach *fortgelassen* sein mögen.

Es werde

$$(16) \qquad \int h(s) \varphi_m(s)\, ds = h_m$$

genannt; nunmehr gilt:

$$(16_*) \quad 0 = \int h(s) f_{\nu_p}(s)\, ds = \int h(s) \cdot \sum \alpha_m l_m^{-\nu_p} \varphi_m(s) \cdot ds \quad \text{(statthaft)}$$
$$= \sum \alpha_m l_m^{-\nu_p} h_m \quad \text{(vgl. § 2)},$$

für alle unendlichvielen ganzzahligen $\nu_p \to \infty$, was nach dem Eindeutigkeitssatz der allgemeinen Dirichletschen Reihen nur dann möglich ist, wenn hier bei jedem m

$$(16^*) \qquad \alpha_m h_m = 0, \quad \text{d. h.} \quad h_m = 0 \quad [\text{wegen } \alpha_m \neq 0]$$

gilt. Alsdann hat man aber auch

$$(17) \qquad \int h(s) f_n(s)\, ds = \int h(s) \sum \alpha_m l_m^{-n} \varphi_m(s)\, ds = \sum \alpha_m l_m^{-n} h_m = 0,$$

w. z. b. w.

Wenn nun eine (quadratisch summierbare) Funktion $f_*(s)$ im Raume aller $f_{\nu_p}(s)$ liegen soll, so ist dies äquivalent mit der Aussage, daß *jede* Funktion $h(s)$, die zu allen $f_{\nu_p}(s)$ orthogonal ist, auch zu $f_*(s)$ orthogonal ausfällt; eine solche Funktion ist aber nach dem vorangegangenen zu jedem $f_n(s)$ überhaupt orthogonal, also — da $f_*(s)$ nach Voraussetzung des noch in Frage stehenden Satzes dem (linearen) Gesamtraume aller $f_n(s)$ angehört — tatsächlich auch zu $f_*(s)$, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 6.

Die Dichtigkeit des $F_n(x)$-Systems.

Hilfssatz. *Es sei* $F_{\nu_1}(x), \ldots, F_{\nu_p}(x), \ldots$ *eine ganz beliebige unendliche Teilfolge aus den* [*durch* (14) *definierten*] $F_n(x)$; *jede der Funktionen* $F_n(x)$ *selbst ist für* $a \leqq x \leqq b$ durch die $F_{\nu_p}(x)$ [*mit beliebiger Genauigkeit und gleichmäßig*] *linear approximierbar.*

Beweis. Zu jedem noch so kleinen vorgeschriebenen $\varepsilon > 0$ soll es also einen hinreichend hohen Index $P = P(\varepsilon)$ geben, derart, daß für $a \leqq x \leqq b$ bei passend gewählten Konstanten $\gamma_p = \gamma_p(n, \varepsilon)$ stets gilt

$$\left| F_n(x) - \sum_{p=1}^{P} \gamma_p F_{\nu_p}(x) \right| < \varepsilon, \tag{18}$$

und dies zeigen wir folgendermaßen.

$f_n(s)$ liegt (§ 5) im Raume der $f_{\nu_p}(s)$; wenn man also das System der letzteren Funktionen orthonormiert zu

$$\overset{*}{f}_{\nu_1}(s), \ldots, \overset{*}{f}_{\nu_p}(s), \ldots \tag{19}$$

und allgemein

$$\int f_n(s) \overset{*}{f}_{\nu_p}(s)\, ds = \overset{*}{\alpha}_p(n) = \overset{*}{\alpha}_p \tag{19$_*$}$$

nennt, so besteht die mittelkonvergente Beziehung

$$f_n(s) \sim \sum_{p=1}^{\infty} \overset{*}{\alpha}_p \overset{*}{f}_{\nu_p}(s), \tag{19*}$$

und dies bedeutet u. a. bekanntlich, daß zu jedem noch so kleinen $\delta > 0$ ein Index $P = P(\delta)$ existiert, derart, daß man dann hat:

$$\int \left[f_\nu(s) - \sum_{p=1}^{P} \overset{*}{\alpha}_p \overset{*}{f}_{\nu_p}(s) \right]^2 ds < \delta^2; \tag{20}$$

setzt man hier für die $\overset{*}{f}_{\nu_p}(s)$ die (explizit bekannten) linearen Ausdrücke durch die ursprünglichen $f_{\nu_p}(s)$ ein, so erhält man damit eine Beziehung von der Form

$$\int_a^b \left[f_\nu(s) - \sum_{p=1}^{P} \gamma_p f_{\nu_p}(s) \right]^2 ds < \delta^2 \tag{20$_*$}$$

a fortiori also

$$\int_a^x \left[f_\nu(s) - \sum_{p=1}^{P} \gamma_p f_{\nu_p}(s) \right]^2 ds < \delta^2, \tag{20*}$$

woraus nach der klassischen Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\left\{ F_n(x) - \sum_{p=1}^{P} \gamma_p F_{\nu_p}(x) \right\}^2 = \left\{ \int_a^x \left[f_\nu(s) - \sum_{p=1}^{P} \gamma_p f_{\nu_p}(s) \right] ds \right\}^2 \leqq (x-a)\, \delta^2, \tag{20a}$$

worin der hier zu beweisende Hilfssatz offenbar enthalten ist. —

Es sei nunmehr $F(x)$ *irgend*eine vorgelegte stetige Funktion, von der man nur weiß, daß sie durch das System *aller* $F_n(x)$ [beliebig genau, gleichmäßig, linear: dies ist auch im folgenden stets gemeint] approximierbar sei; es ist also zu jedem $\delta > 0$ möglich, mit $N = N(\delta)$ und passenden $\varrho_n = \varrho_n(\delta)$, die Ungleichung

$$|F(x) - \sum_{n=1}^{N} \varrho_n F_n(x)| < \delta, \quad a \leqq x \leqq b, \tag{21}$$

zu erfüllen[18]), wobei hier übrigens wegen $F_n(\alpha) = 0$ auch $F(a) = 0$ sein muß. Wir behaupten jetzt, daß $F(x)$ ebenso durch jede *beliebige* unendliche *Teil*folge $F_{\nu_1}(x), \ldots, F_{\nu_p}(x), \ldots$ aus den $F_n(x)$ approximierbar ist, d. h.:

Satz. *Das System der* $F_n(x)$ *ist stets dicht.*

Beweis. Nach Voraussetzung kann zu jedem $\varepsilon > 0$

$$|F(x) - \sum_{n=1}^{N}{}^{*} \varrho_n F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad a \leqq x \leqq b, \tag{21$_*$}$$

erreicht werden, wobei der Stern die Summation über die Indizes mit $\varrho_n \neq 0$ bedeuten möge; nach dem bewiesenen Hilfssatz aber kann man ebenso allgemein

$$|\varrho_n F_n(x) - \sum_{p=1}^{P_n} \gamma_p^{(n)} F_{\nu_p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2N} \tag{21*}$$

bewirken; aus den so gewonnenen Beziehungen läßt sich dann die behauptete Approximierbarkeit von $F(x)$ durch die $F_{\nu_p}(x)$ ohne weiteres ersehen.

§ 7.

Vollständige dichte Systeme.

Besonders interessant ist der Fall, daß das Ausgangssystem der $f_n(s)$ quadratisch *vollständig* ist, keine quadratisch summierbare Funktion $h(s)$ also existiert, die zu allen $f_n(s)$ orthogonal wäre.

Es ist nicht schwer anzugeben, wann dies zutrifft: 1. der Kern $\Phi(s,t)$ muß hierzu notwendig selbst vollständig sein, die homogene Integralgleichung (2) für diesen Kern als quadratisch summierbare Lösung nur $g(t) \equiv 0$ zulassen, 2. die ursprüngliche Funktion $f_0(s)$ darf zu keiner der Eigenfunktionen $\varphi_m(s)$ von $\Phi(s,t)$ orthogonal ausfallen[19]) — da das Sy-

[18]) Die Entscheidung darüber, *wann* eine gegebene Funktion $G(x)$ durch ein vorgeschriebenes System $G_n(x)$ approximierbar ist oder nicht, soll erst im dritten Teil dieser Arbeit gegeben werden.

[19]) Alle Eigenwerte l müssen hierzu übrigens *einfach* sein.

stem der $\varphi_m(s)$ hier selbst vollständig ist, gilt dann das gleiche nach § 5 auch für die $f_n(s)$.

Es besteht *in diesem Falle* der folgende

Hauptsatz. *Jede beliebige stetige Funktion $F(x)$ für $a < a' \leqq x \leqq b$ läßt sich durch jede willkürlich gewählte unendliche Teilfolge $F_{\nu_1}(x), \ldots, F_{\nu_p}(x), \ldots$ beliebig genau approximieren [sobald also das Iterationssystem $f_n(s)$ vollständig ist].*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a = 0$, $b = 1$, ferner, durch beliebige passende stetige Ergänzung von $F(x)$ für $a \leqq x \leqq a'$, noch $F(a) = 0$.

Zunächst läßt sich $F(x)$ nach dem klassischen Weierstraßschen Approximationssatze in der verlangten Weise durch $x, x^2, \ldots, x^m, \ldots$ approximieren, und es genügt daher zu zeigen, daß jede dieser natürlichen Potenzen ihrerseits ebenso durch die $F_{\nu_p}(x)$ approximierbar ist.

Das System der $f_n(s)$ ist hier vollständig; nach § 5 ist es also auch das Teilsystem der $f_{\nu_p}(s)$. Da ms^{m-1} gewiß quadratisch summierbar ist, läßt sich also bei jedem m zu gegebenem $\delta > 0$

$$\int_0^1 \Big[ms^{m-1} - \sum_{p=1}^{P_m} \gamma_p^{(m)} f_{\nu_p}(s)\Big]^2 ds < \delta^2 \tag{22}$$

erreichen, also wiederum

$$\Big\{\int_0^x \Big[ms^{m-1} - \sum_{p=1}^{P_m} \gamma_p^{(m)} f_{\nu_p}(s)\Big] ds\Big\}^2 < x\delta^2, \tag{22$_*$}$$

d. h.:

$$\Big|x^m - \sum_{p=1}^{P_m} \gamma_p^{(m)} F_{\nu_p}(x)\Big| < \sqrt{x}\cdot\delta, \tag{22*}$$

und dies genügt. —

Wählt man z. B. $a = 0$, $b = 1$;

$$\Phi(s,t) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi ms \sin \pi mt}{m^2} = \begin{cases} 2t(1-s) \text{ für } s \geqq t, \text{ bzw.} \\ 2s(1-t) \;\;,, \;\; t \geqq s; \end{cases}$$

$$f_0(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi mt}{m} = \frac{1-t}{2},$$

wobei zu beachten ist, daß die Eigenfunktionen $\sqrt{2}\sin \pi mt$ für $0 \leqq t \leqq \pi$ bereits ein *vollständiges* System bilden, so entsteht das also wiederum vollständige System (§ 5):

$$f_n(s) = \frac{1}{2^n \pi^{2n+1}}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi ms}{m^{2n+1}};$$

die Funktionenfolge (mit Unterdrückung konstanter Faktoren)

$$F_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \pi m x}{m^{2n+2}},$$

also im wesentlichen diejenige der Bernoullischen Polynome gerader Ordnung[20]), ist somit tatsächlich als *dicht* gekennzeichnet, und in analoger Weise läßt sich die gleiche Eigenschaft auch etwa für die entsprechenden Polynomfolgen *ungerader* Ordnung beweisen, d. h. für die $f_n(x)$ selbst.

§ 8.

Anwendungen.

Aus den Ausführungen von § 5 folgt ohne weiteres, daß die in § 1 gegebene Lösung der inhomogenen Integralgleichung erster Art (1), statt *alle* $f_n(s)$ zu benutzen, genau ebenso mit jeder unendlichen *Teil*folge $f_{\nu_p}(s)$ auskommen kann, z. B. mit den besonders einfach erhältlichen

$$f_{2^p}(s) = \int \Phi^{2^p}(s,t) f_0(s)\, ds, \quad \Phi^{2^{\nu+1}}(s,t) = \int \Phi^{2^\nu}(r,s)\, \Phi^{2^\nu}(r,t)\, dr,$$

sowie den zugehörigen $g_{2^p+1}(s)$. Die in [13]) gegebene Bestimmung der $\varphi_m^*(s)$ bleibt dabei m. m. bestehen; auch für die Bestimmung — s. [14]) — aller Eigenfunktionen eines beliebigen symmetrischen Kernes läßt sich die gleiche Bemerkung machen.

---

[20]) Vgl. Encyklopädie der Math. Wiss. II A 12, S. 867.

(Eingegangen am 22. November 1923.)

Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen.

Von

A. Besikowitsch in Petrograd.

§ 1.

Es sei $a < 0$, $b > 1$ und $f_1(x)$, $\varphi(x)$, $f_2(x)$ analytische Funktionen in den Intervallen $(a, 0)$, $(0, 1)$, $(1, b)$.

Wir definieren die Funktion $\psi(x)$ in dem Intervall (a, b), das durch Verbindung der drei Intervalle erhalten wird, in dem wir setzen:

$$\psi(x) = f_1(x) \text{ im ersten Intervall,}$$
$$\psi(x) = \varphi(x) \text{ im zweiten Intervall,}$$
$$\psi(x) = f_2(x) \text{ im dritten Intervall.}$$

Sind $f_1(x)$, $\varphi(x)$, $f_2(x)$ verschiedene analytische Funktionen, so kann $\psi(x)$ in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ nicht analytisch sein.

G. D. Birkhoff stellt in seiner Abhandlung „The generalised Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations“[1]) die Behauptung auf — ohne einen Beweis dafür auszuführen —, daß es möglich sei, indem man die Funktion $\varphi(x)$ einer geringen Variation unterwirft, für $\psi(x)$ eine in allen Punkten außer $x = 0$ und $x = 1$ analytische Funktion zu erhalten, die in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ alle Ableitungen besitzt[2]).

Es ist klar, daß die Aufgabe, die Funktion $\psi(x)$ zu finden, folgendem Problem äquivalent ist:

Für das Intervall $(0, 1)$ *eine Funktion* $f(x)$ *so zu bestimmen, daß sie der analytischen Funktion* $\varphi(x)$ *genügend nahe sei, im Intervall ana-*

[1]) Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences **49**, Nr. 9 (Oktober 1913).

[2]) Auf diesen Punkt in der Arbeit von Birkhoff wurde meine Aufmerksamkeit durch Herrn Tamarkin gelenkt.

lytisch sei und an seinen Enden mit allen ihren Ableitungen vorgeschriebene Werte annehme.

Ich will hier eine Lösung dieses Problems geben, wobei ich von einfacheren Aufgaben ausgehe. Außerdem gestatten die von mir eingeführten Reihen eine andere Aufgabe über analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die der behandelten Aufgabe ähnlich ist, zu lösen.

§ 2.

Aufgabe 1. *Eine Funktion $f(x)$ im Gebiet $x(0, +\infty)$ zu finden, die für $x > 0$ analytisch ist und für $x = 0$ mit allen ihren Ableitungen die vorgeschriebenen Werte annimmt:*

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots .$$

Wir betrachten zum Beweis die Reihe:

$$(1)\quad F(x) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0+x)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^x \frac{dt}{(c_1+t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_2 b_2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_2+t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_3 b_3 \int_0^x dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_3+t)^{\frac{1}{2}}} +$$

Hier sind $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ vorgegebene positive Zahlen nicht größer als 1; die Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ dürfen nur die Werte $-1, 0, +1$ annehmen; die Zahlen $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ sind positiv.

Die Reihe (1) konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen Intervall: $0 \leqq x \leqq A$. Es ist nämlich, wenn wir $A > 1$ voraussetzen:

$$(2)\quad \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{\frac{1}{2}}} < \int_0^A dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{A^{n-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)} <$$

und die Reihe $\sum \frac{2A^n}{(n-1)!}$ konvergiert für jedes A.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Reihe, die durch k-malige gliedweise Differentiation der Reihe (1) erhalten wird, ebenfalls in jedem endlichen Intervall $(0, A)$ gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt, daß die Reihe (1) für $x \geqq 0$ eine stetige Funktion darstellt, die für dieselben Werte von x Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, welche durch gliedweise Differentiation der Reihe erhalten werden.

Die Reie (1) ist eine analytische Funktion für $x > 0$. Um das einzusehen, nehmen wir in der Ebene der komplexen Veränderlichen x den Kreis von Radius A und Zentrum im Anfangspunkt und betrachten die Reihe (1) für solche Werte von x, die im Halbkreise rechts der imaginären Achse liegen. Die Integrationswege der Variablen $t, t_1, t_2, \ldots$ sollen in Gebieten derselben Form liegen. Wie leicht ersichtlich, ist für

alle Werte von x in diesem Gebiet die Ungleichung (2) durch folgende ersetzbar:

$$(3) \qquad \left| \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{\frac{1}{2}}} \right| < \frac{2A^n}{(n-1)!}.$$

Daraus ist auf Grund des Weierstraßschen Theorems zu schließen, daß im Halbkreise die Reihe (1) eine holomorphe Funktion darstellt, d. h. die Reihe (1), als Funktion der reellen Veränderlichen x, ist für $x > 0$ eine analytische Funktion.

Jetzt ist klar, wie bei gegebenen Werten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ die Werte der Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und $c_0, c_1, c_2, \ldots$ zu wählen sind, damit die Reihe $F(x)$ eine Lösung unserer Aufgabe darstelle, d. h. damit die Gleichheiten

$$F(0) = a_0, \quad F'(0) = a_1, \quad F''(0) = a_2, \quad \ldots$$

bestehen.

Denn daraus folgt das Gleichungssystem:

$$\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{1}{2}} = a_0,$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{1}{2}} = a_1,$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon_2 b_2 c_2^{-\frac{1}{2}} = a_2,$$

. . . . . .

oder

$$(4) \qquad \varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{1}{2}} = a_0,$$

$$(5) \qquad \varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{1}{2}} = a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{3}{2}},$$

$$(6) \qquad \varepsilon_2 b_2 c_2^{-\frac{1}{2}} = a_2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{3}{2}},$$

. . . . . .

Der Größe ε_0 schreiben wir die Werte $+1$, 0 oder -1 zu, entsprechend den drei Fällen: die rechte Seite von (4) ist > 0, $= 0$ oder < 0. Ist ε_0 bestimmt und $\neq 0$, so folgt aus (4) der Wert von c_0. Jetzt setzen wir ε_1 gleich $+1$, 0 oder -1, je nachdem die rechte Seite von (5) > 0, $= 0$ oder < 0 ist. Ist ε_1 bestimmt und $\neq 0$, so folgt aus (5) c_1. In analoger Weise bestimmen wir $\varepsilon_2, c_2, \varepsilon_3, c_3, \ldots$.

Aufgabe 1 ist damit gelöst.

Der Funktion $f(x)$ kann man auch die allgemeinere Form geben:

$$f(x) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0+x)^{h_0}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^x \frac{dt}{(c_1+t)^{h_1}} + \varepsilon_2 b_2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_2+t)^{h_2}} + \ldots.$$

Hier sind $h_0, h_1, h_2, \ldots$ beliebige vorgegebene Zahlen, die der Bedingung genügen

$$0 < h_i < h < 1, \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \ldots .$$ [3])

Aufgabe 2. *Es ist eine Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$f(x)$ ist eine analytische Funktion für $0 < x < 1$;*
2. $f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots;$
3. $f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = 0.$

Zum Beweise nehmen wir eine Funktion $F(x)$ zu Hilfe, die analytisch für $x > 0$ ist und mit allen ihren Ableitungen für $x = 0$ die vorgegebenen Werte

$$F(0) = \alpha_0, \quad F'(0) = \alpha_1, \quad F''(0) = \alpha_2, \ldots$$

annimmt, wobei die Größen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ so genommen werden, daß die Funktion

$$F(x)\, e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} \tag{7}$$

und ihre Ableitungen im Punkte $x = 0$ die Werte haben:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots .$$

Im Punkte $x = 1$ ist die Funktion (7) mit allen ihren Ableitungen gleich Null. Im Intervall $(0, 1)$ stellt (7) eine analytische Funktion dar. Die Lösung der Aufgabe 2 wird also durch die Formel gegeben:

$$f(x) = F(x)\, e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Aufgabe 3. *Eine Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die den Bedingungen genügt:*

1. *$f(x)$ ist eine analytische Funktion für $0 < x < 1$;*
2. $f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots;$
3. $f(1) = A_0, \quad f'(1) = A_1, \quad f''(1) = A_2, \ldots .$

---

[3]) Nachdem Herr O. Perron unsere Arbeit kennen gelernt hatte, hatte er die Liebenswürdigkeit uns mitzuteilen, daß die Reihe (1) durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(z)$$

ersetzt werden kann, deren n-tes Glied derselben Ungleichung (2) genügt; z. B.

$$\varphi_n(z) = 2 z^{n-1} \frac{\sqrt{c+z} - \sqrt{c}}{n!},$$

Diese Verallgemeinerung ist sehr naheliegend, denn die Lösung unseres Problems beruht eben auf der erwähnten Ungleichung.

Wir nehmen die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu Hilfe, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind analytische Funktionen für $0 < x < 1$;
2. $f_1(0) = a_0, \quad f_1'(0) = a_1, \ldots; \quad f_1(1) = f_1'(1) = \ldots = 0;$
3. $f_2(1) = A_0, \quad f_2(1) = A_1, \ldots; \quad f_2(0) = f_2'(0) = \ldots = 0.$

Die Lösung der Aufgabe 3 ergibt sich in der Form

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

§ 3.

Die durch (1) gegebene Funktion $F(x)$ besitzt zwei wichtige Eigenschaften:

Eigenschaft 1. Gibt man den Größen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ genügend kleine Werte, so kann für die Reihe $F(x)$ beliebig rasche Konvergenz in einem beliebigen endlichen Intervall erzielt werden.

Eigenschaft 2. Für beliebig kleine positive Zahlen α und β, für eine beliebig große positive Zahl A und eine beliebig große ganze positive Zahl k kann immer durch Wahl genügend kleiner Werte für die Größen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ erreicht werden, daß im Intervall (α, A) die Reihe $F(x)$ und ihre ersten k Ableitungen ihrem Modul nach die Größe β nicht übersteigen.

§ 4.

$\varphi(x)$ sei eine beliebige analytische Funktion und es sei

$$\varphi(0) = a_0', \quad \varphi'(0) = a_1', \quad \varphi''(0) = a_2', \ldots.$$

Wir bauen die Reihe $F(x)$ auf, wobei wir voraussetzen

$$F(0) = a_0 - a_0', \quad F'(0) = a_1 - a_1', \quad F''(0) = a_2 - a_2', \ldots;$$

außerdem nehmen wir an (s. § 3, Eigenschaft 2), daß im Intervall (α, A) die Funktion $F(x)$ und ihre k ersten Ableitungen dem Betrage nach nicht größer sind als β. Dann können wir folgende Aufgabe lösen:

Eine für $x > 0$ analytische Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die mit allen ihren Ableitungen im Punkte $x = 0$ vorgegebene Werte annimmt:

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots$$

und im Intervall (α, A) der gegebenen analytischen Funktion $\varphi(x)$ sich so anschmiegt, daß die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ und ihre k ersten Ableitungen in diesem Intervall dem Betrage nach die Größe β nicht übersteigen.

Die Lösung ist:

$$f(x) = \varphi(x) + F(x).$$

§ 5.

Es sei nun $\varphi(x)$ eine Funktion mit einer k-ten stetigen Ableitung im Intervall $(0, A)$. In diesem Fall kann ein Polynom $P(x)$ so gewählt werden[4]), daß die Differenz $P(x) - \varphi(x)$ und ihre k ersten Ableitungen in diesem Intervall ihrem Absolutwert nach kleiner als $\frac{1}{2}\beta$ bleiben.

Nach § 4 kann weiter eine Funktion $f(x)$ bestimmt werden, die analytisch ist für $x > 0$, im Punkte $x = 0$ mit allen ihren Ableitungen vorgegebene Werte annimmt

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots$$

und im Intervall (α, A) das Polynom $P(x)$ so approximiert, daß die Differenz $f(x) - P(x)$ und ihre k ersten Ableitungen dem Betrage nach unterhalb $\frac{1}{2}\beta$ bleiben.

Daraus folgt das Theorem:

Für eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ mit stetiger k-ter Ableitung läßt sich immer eine Funktion $f(x)$ konstruieren, die analytisch ist für $x > 0$, mit allen ihren Ableitungen im Punkte $x = 0$ vorgegebene Werte annimmt und die Funktion in dem Sinne approximiert, daß die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ und ihre ersten k Ableitungen dem Betrage nach die Größe β nicht übertreffen.

§ 6.

α, β und k sollen die frühere Bedeutung haben; α' sei eine positive Zahl kleiner als 1, aber beliebig nahe an 1. Es ist nun leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Für eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ mit stetiger k-ter Ableitung kann immer eine Funktion $f(x)$ gefunden werden, die analytisch ist für $0 < x < 1$, in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ mit allen ihren Ableitungen vorgegebene Werte annimmt und für die die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ und ihre k ersten Ableitungen dem Betrage nach die Größe β nicht übertreffen.

Dieser Satz beweist die Richtigkeit der Behauptung von Birkhoff.

§ 7.

Wir betrachten nun die Reihe

$$(8) \quad F(x) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0 + x)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^x \frac{dt}{(c_1 + t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_2 b_2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_2 + t)^{\frac{1}{2}}} + \ldots$$

in der Ebene der komplexen Veränderlichen x.

[4]) De la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, t. II (1912), pp. 126–129.

Um die Eindeutigkeit des allgemeinen Gliedes der Reihe (8)

$$\varepsilon_n b_n \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{1/2}}$$

festzulegen, wählen wir erstens irgendwelchen bestimmten Wert für den Ausdruck $(c_n+t)^{1/2}$ im Punkte $t=0$ (z. B. den positiven) und setzen fest, daß, wenn x nicht auf dem negativen Teil der reellen Achse liegt, die Integrationswege nach allen Veränderlichen $t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ keine Punkte mit dem negativen Teil der reellen Achse gemein haben. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß alle Integrationswege geradlinig sind. Ist x ein Punkt der negativen reellen Achse, so setzen wir voraus, daß die Integrationswege aller Veränderlichen mit allen ihren Punkten (ausgenommen die Grenzpunkte) oberhalb der reellen Achse liegen.

Indem wir die erste Annahme machen, daß x nicht der negativen Halbachse angehört, wollen wir die Größe des allgemeinen Gliedes der Reihe abschätzen. Wir haben

$$\left| \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c+t)^{1/2}} \right| \leqq \int_0^{|t_1|} \frac{dt}{|t-c|^{1/2}},$$

wobei im letzten Integral die Integration längs der reellen Achse auszuführen ist.

Nun ist aber

$$\left| \int_0^{|t_1|} \frac{dt}{|t-c|^{1/2}} \right| = \begin{cases} 2c^{1/2} - 2(c-|t_1|)^{1/2}, & \text{für } |t_1| \leqq c, \\ 2c^{1/2} + 2(|t_1|-c)^{1/2}, & \text{für } |t_1| > c. \end{cases}$$

Nun haben wir für $|t_1| \leqq c$:

$$2c^{1/2} - 2(c-|t_1|)^{1/2} = \frac{2|t_1|}{c^{1/2}+(c-|t_1|)^{1/2}} < 2|t_1|^{1/2}$$

und für $|t_1| > c$:

$$2c^{1/2} + 2(|t_1|-c)^{1/2} < 4|t_1|^{1/2}.$$

Also ist für jedes t_1

$$\left| \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c+t)^{1/2}} \right| < 4|t_1|^{1/2}. \tag{9}$$

Daraus folgt für $|x| \leqq A$ $(A>1)$:

$$\left| \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{1/2}} \right| < \frac{4A^n}{(n-1)!} \tag{10}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Ungleichung (10) auch für ein x auf der negativen Halbachse richtig bleibt.

Die Reihe (8) konvergiert also gleichmäßig in einem beliebigen endlichen Gebiet und stellt eine in der ganzen Ebene außerhalb des Strahles $(0, -\infty)$ holomorphe Funktion dar, die einen Sprung hat für reelle negative Werte von x, im Punkte $x = 0$ stetig ist und mit allen ihren Ableitungen im Punkte $x = 0$ vorgeschriebene Werte annimmt.

Um sich nicht auf den Fall reeller Werte der Funktion $F(x)$ und ihrer Ableitungen im Punkte $x = 0$ zu beschränken, genügt es, in der Reihe (8) für $b_0, b_1, b_2, \ldots; c_0, c_1, c_2, \ldots$ positive Werte zu belassen und für $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ die Werte Null oder Werte von der Form $e^{\varphi i}$ anzunehmen.

So kommen wir zur Lösung einer Aufgabe in der Ebene, die analog ist dem Borelschen Problem für die Strecke[5]).

Wie leicht ersichtlich, kann eine Funktion $F(x)$ konstruiert werden, die im endlichen Gebiet A außerhalb des Strahles $(0, -\infty)$ Eigenschaften besitzt, die analog sind denen, die in § 3 angegeben waren. Auch läßt sich für das Gebiet A eine der Aufgaben von § 4 analoge Aufgabe lösen.

---

[5]) Die Lösung des Borelschen Problems für eine Strecke hat S. Bernstein gefunden (R. D'Adhémar, Leçons sur les principes d'Analyse 2 (1913), pp. 259—283). Jedoch kann man mehrere wichtige Eigenschaften angeben, die unsere Lösung, nicht aber die Bernsteinsche, besitzt. Außerdem kann man die Bernsteinsche Lösung nicht über die komplexe Ebene fortsetzen.

(Eingegangen am 19. Dezember 1923.)

Über die asymptotischen Ausdrücke für die Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen.

Von

J. Tamarkin und A. Besikowitsch in Petrograd.

Die Arbeit von J. Tamarkin „Über einige allgemeine Probleme der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen", welche in russischer Sprache im Jahre 1917 erschienen ist, enthält folgendes Theorem[1]):

Theorem. *Es sei ein Differentialsystem*

$$(A) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, \varrho)\, y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben, dessen Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ *von der Form*

$$(B) \qquad \mathfrak{A} \equiv \varrho^p \left[\mathfrak{A}^{(p)}(x) + \frac{1}{\varrho}\mathfrak{A}^{(p-1)}(x) + \ldots + \frac{1}{\varrho^{p-1}}\mathfrak{A}^{(1)}(x) + \frac{1}{\varrho^p}\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{-\nu}\mathfrak{A}^{(-\nu)}(x) \right]$$

ist, und es seien folgende Bedingungen erfüllt:

1. *Die Elemente der Matrizen* $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ *sind stetige und gleichmäßig beschränkte Funktionen der Veränderlichen* x *im Intervall* (a, b).

2. *Die Wurzeln*

$$\Theta = \varphi_1^{(p)}, \ldots, \varphi_n^{(p)}$$

der Gleichung

$$\mathrm{Det}(\mathfrak{A}^{(p)} - \Theta\,\mathfrak{E}) = 0,$$

wo $\mathfrak{E}$ *die Einheitsmatrix bedeutet, sind untereinander verschieden für alle Werte von* x *in* (a, b).

[1]) Vgl. einen Aufsatz von Herrn G. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc. (1908), S. 219—231, wo ein Spezialfall unseres Theorems bewiesen ist.

3. *Bedeutet m eine gegebene ganze Zahl $\geqq 1$ und sind k, r ganze Zahlen, die der Gleichung*

$$m = kp + r + 1 \qquad (0 \leqq r \leqq p-1)$$

genügen, so sind die Elemente der Matrizen

$$\frac{d^{k+1}\mathfrak{A}^{(p)}}{dx^{k+1}}, \ldots, \frac{d^{k+1}\mathfrak{A}^{(p-r)}}{dx^{k+1}}, \frac{d^{k}\mathfrak{A}^{(p-r-1)}}{dx^{k}}, \ldots, \frac{d^{k}\mathfrak{A}^{(-r)}}{dx^{k}}, \ldots, \mathfrak{A}^{(-m+p)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(-m+1)}$$

einmal stetig differentiierbar im Intervall (a, b).

4. *Die Entwicklungen* (B) *sind für alle Werte $a \leqq x \leqq b$ konvergent oder auch nur asymptotisch in einem unendlichen Bereiche (Ω_1) der komplexen ϱ-Ebene.*

Dann existiert eine Matrix, deren Elemente formale Reihen sind, und deren Spalten dem Gleichungssystem (A) *formal genüge leisten:*

$$(1) \qquad \mathfrak{H} = (H_{ik}); \quad H_{ik} \equiv e^{\int_a^x \omega_k(x,\varrho)\,dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{-\nu} y_{ik}^{(\nu)}(x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Koeffizienten

$$\omega_k(x, \varrho) = \varrho^p \varphi_k^{p)} + \ldots + \varrho\, \varphi_k^{(1)} \quad \text{und} \quad y_{ik}^{(\nu)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

dieser Reihen bestimmt man, indem man die Reihen in das System (A) *einsetzt und die vom Faktor $e^{\int_a^x \omega_k\,dx}$ befreiten Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von ϱ gleich Null setzt.*

Diese, im allgemeinen divergenten, Reihen liefern eine angenäherte Darstellung eines gewissen Fundamentalsystems der Lösungen des Differentialsystems (A). *Bedeutet nämlich (Ω) einen Teil von (Ω_1), worin die Ungleichungen*

$$(2) \qquad |\varrho| > \Pi$$

(Π eine genügend große positive Konstante) und

$$(3) \qquad \Re(\omega_1) \leqq \Re(\omega_2) \leqq \ldots \leqq \Re(\omega_n)$$

bei einer passenden Anordnung der Funktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ erfüllt sind, so existiert für jedes m ein Fundamentalsystem $\mathfrak{Y}^{(m)} = (Y_{ik}^{(m)})$ der Lösungen des Differentialsystems (A), *deren Elemente von der Form*

$$(4) \qquad Y_k^{(m)} = e^{\int_a^x \omega_k\,dx} \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} \varrho^{-\nu} y_{ik}^{(\nu)}(x) + \frac{E}{\varrho^m} \right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind. Dabei sind allgemein mit E Funktionen angedeutet, die für alle x in (a, b) und ϱ in (Ω) gleichmäßig beschränkt bleiben.

Besitzen die Elemente der Matrizen $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ Differentialquotienten aller Ordnungen, so lassen sich die formalen Reihen beliebig weit fortsetzen, und es liegt die Vermutung nahe, daß die Reihen nicht nur angenäherte, sondern auch eine asymptotische Darstellung eines gewissen Fundamentalsystems der Lösungen von (A) darbieten, das im Gegensatz zu $\mathfrak{Y}^{(m)}$ vom Grade der Genauigkeit, d. h. von der Zahl m unabhängig ist.

Wie Herr O. Perron in bezug auf die entsprechende Stelle des Aufsatzes von Herrn G. Birkhoff bemerkte[2]), bedarf diese heikle Tatsache eines besonderen Beweises, den er auf Grund eines speziellen Hilfssatzes unter Beschränkung auf reelle Werte des Parameters ϱ erhält[3]).

Mit Hilfe der Konstruktion, die in der vorstehenden Arbeit des Herrn Besikowitsch dargestellt wird[4]), erwies es sich als möglich, den Hilfssatz und somit den ganzen Perronschen Beweis auf das gesamte komplexe Gebiet (Ω) des Parameters ϱ auszudehnen, wobei aber der Beweis des Hilfssatzes auf einem völlig verschiedenen Prinzip beruht.

Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz. *Es sei eine willkürliche unendliche Folge von (reellen oder komplexen) Größen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, *gegeben. Dann läßt sich eine Funktion* $\Phi(z)$ *der komplexen Veränderlichen* z *finden, die in der ganzen* z*-Ebene, mit Ausnahme eines beliebig gewählten Strahls* $(0, \infty)$ *analytisch ist und in diesem Bereiche die asymptotische Entwicklung*[5])

$$\Phi(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu$$

zuläßt.

Zum Beweise bezeichnen wir mit $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ eine von Anfang an gegebene Folge, mit $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ eine gegebene Folge positiver Zahlen $\leqq 1$, mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ eine Folge von Zahlen, die der Bedingung

$$|\varepsilon_n| = 0 \text{ oder } 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügen, und endlich mit $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen, die weiter unten genauer besprochen wird.

---

[2]) Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wiss., Math.-Naturwiss. Klasse, 1919, (A, 6), S. 25.

[3]) Ebenda 1918 (A, 15), S. 6.

[4]) „Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen", diese Zeitschrift (1924), S. 111–118.

[5]) Bezüglich der genauen Definition siehe den unter [3]) zitierten Aufsatz des Herrn Perron, S. 5.

Es sei

$$\Phi(z) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0+z)^{1/2}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^z \frac{dt}{(c_1+t)^{1/2}} + \ldots + \varepsilon_n b_n \int_0^z dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{1/2}} + \ldots$$

$$= v_0(z) + v_1(z) + \ldots + v_n(z) + \ldots,$$

wobei diejenige Definition der mehrdeutigen Funktion $(c_n+z)^{1/2}$ genommen wird, die für positiv reelles z positive Werte annimmt. Der Integrationsweg soll mit dem Schnitte längs der negativen reellen Achse der z-Ebene keine gemeinsame Punkte haben (selbstverständlich darf demgemäß auch z nicht negativ reell sein).

Somit sind alle in Betracht kommenden Funktionen in der zerschnittenen Ebene eindeutig bestimmt. Daher können wir alle Integrationswege durch geradlinige ersetzen, und es erweist sich leicht

$$\left| \int_0^z \frac{dt}{(c_n+t)^{1/2}} \right| \leqq 4 |z|^{1/2}$$

und sukzessive

$$|v_n(z)| < 4 \frac{|z|^{\frac{1}{2}+n-1}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}} = \frac{2^{n+1}|z|^{n-\frac{1}{2}}}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}.$$

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften der Funktion $\Phi(z)$:

1. Sie ist in der zerschnittenen Ebene analytisch und eindeutig.

2. Fixiert man n und setzt

$$(5) \quad \Phi(z) = v_0(z) + v_1(z) + \ldots + v_{n-1}(z) + R_n(z) = \Phi_n(z) + R_n(z),$$

so ist

$$R_n(z) = O(z^{n-\frac{1}{2}})$$

und $\Phi_n(z)$ ist holomorph für genügend kleine $|z|$.

3. Durch eine passende Wahl der Konstanten ε und c kann man die Gleichungen

$$\Phi_n(0) = a_0, \quad \Phi_n'(0) = a_1, \quad \ldots, \quad \Phi_n^{(n-1)}(0) = a_{n-1}$$

erfüllen.

Zu diesem Zwecke genügt es

$$\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{1}{2}} = a_0$$

zu setzen und ε_0 so zu wählen, daß

$$\varepsilon_0 = 0, \text{ falls } a_0 = 0, \text{ bzw. } \arg \varepsilon_0 = \arg a_0, \text{ falls } a_0 \neq 0,$$

wodurch die Zahl $c_0 > 0$ eindeutig bestimmt wird (eine einzige Ausnahme findet in dem Falle $a_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$ statt; dann verschwindet jedoch das

entsprechende Glied aus dem Ausdruck für $\Phi(z)$, und c_0 kann willkürlich gewählt werden).

Ferner setzen wir

$$\varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{1}{2}} = a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{3}{2}} = a_1$$

und

$$\varepsilon_1 = 0, \text{ falls } a_1' = 0, \text{ bzw. } \arg\varepsilon_1 = \arg a_1', \text{ falls } a_1' \neq 0,$$

woraus sich die Zahl c_1 ermitteln läßt, usw. Auf diese Weise kann man alle Zahlen c aus den vorgeschriebenen Werten von $\Phi_n^{(k)}(0)$ sukzessive berechnen.

Somit haben wir für hinreichend kleine $|z|$:

$$\Phi_n(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}z^{n-1} + R_n^{(1)}(z),$$

wo

$$R_n^{(1)}(z) = O(z^n)$$

ist. Daraus und aus (5) ergibt es sich endlich, wenn man noch

$$a_0 = \alpha_0, \quad \frac{a_1}{1!} = \alpha_1, \quad \frac{a_2}{2!} = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \alpha_{n-1}, \quad \ldots$$

setzt,

$$\Phi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1}z^{n-1} + r_n(z),$$

wobei

$$\lim_{z\to 0} z^{-n+1} r_n(z) = 0,$$

wenn z auf irgendeinem Wege in der zerschnittenen Ebene nach Null strebt, und für jeden Wert von n.

Damit ist unser Hilfssatz bewiesen, denn es ist ja ersichtlich, daß unsere Auseinandersetzungen keine wesentliche Änderung erleiden, falls der Schnitt nicht längs der negativ reellen Achse, sondern längs einem beliebigen Strahl $(0, \infty)$ gezogen ist.

Wenden wir uns nun zu unserem Problem. Zunächst wollen wir zeigen, daß es *eine* Lösung

$$y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gibt, die im Gebiete (Ω) eine asymptotische Entwicklung

$$y_{in} \sim e^{\int_a^x \omega_n dx} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^{-\nu} y_{in}^{(\nu)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zuläßt.

Der Einfachheit halber setzen wir $p = 1$ und nehmen (was ja die

Allgemeinheit keineswegs einschränkt) an, daß das System (A) auf die folgende Gestalt gebracht ist:

$$(A_1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \varrho\,\varphi_i y_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x,\varrho)\,y_k \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

wo die Entwicklungen der b_{ik} keine positiven Potenzen von ϱ enthalten, so daß man setzen kann:

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Man erkennt leicht, daß die formal gebildete Matrix (1) sich auf die folgende Form reduziert:

$$(1_1) \qquad H_{ik}(x,\varrho) \equiv e^{\varrho\int_a^x \varphi_k\,dx}\,[y_{ik}^{(0)}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{-\nu} y_{ik}^{(\nu)}(x)],$$

wobei

$$(6) \qquad y_{ik}^{(0)}(x) \equiv 0 \text{ für } i \neq k \quad \text{und} \quad y_{ii}(x) \neq 0 \text{ in } (a,b)$$

ist.

Laut unserem Hilfssatz (indem wir $\frac{1}{\varrho}$ für z schreiben) lassen sich solche n Funktionen

$$\Phi_{1n}(\varrho), \quad \Phi_{2n}(\varrho), \quad \ldots, \quad \Phi_{nn}(\varrho)$$

der komplexen Veränderlichen ϱ ermitteln, welche analytisch in (Ω) sind und daselbst die asymptotischen Entwicklungen

$$(7) \qquad \Phi_{in}(\varrho) \sim H_{in}(a,\varrho) \equiv y_{in}^{(0)}(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{-\nu} y_{in}^{(\nu)}(a)$$

besitzen.

Nun wollen wir, wie es auch Herr O. Perron tut, zeigen, daß *die zu findende Lösung* $y_{1n}, \ldots, y_{nn}$ *des Differentialsystems* (A_1) *gerade diejenige ist, welche für* $x = a$ *die Anfangswerte* $\Phi_{in}(\varrho)$ *annimmt, d. h. den Bedingungen*

$$(8) \qquad y_{in}(a) = \Phi_{in}(\varrho) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

genügt.

Zu diesem Zwecke wenden wir das eingangs zitierte Theorem an und stellen den Wert von m fest. Da $\mathfrak{Y}^{(m)}$ ein Fundamentalsystem der Lösungen ist, so kann man n Konstanten

$$c_1(\varrho), \quad c_2(\varrho), \quad \ldots, \quad c_n(\varrho)$$

ausfindig machen, die den Bedingungen

$$y_{in}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(\varrho)\, Y_{ik}^{(m)}(x, \varrho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen.

Diese Konstanten werden eindeutig bestimmt, indem man in diesen Gleichungen $x = a$ setzt, wodurch, kraft (8),

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(\varrho)\, Y_{ik}^{(m)}(a, \varrho) = \Phi_{in}(\varrho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wird.

Statt der Unbekannten $c_k(\varrho)$ führen wir neue Unbekannte $d_k(\varrho)$ ein, indem wir setzen

$$c_k = d_k \quad \text{für} \quad k \leqq n-1; \quad c_n = d_n.$$

Wir erhalten somit

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{n} d_k(\varrho)\, Y_{ik}^{(m)}(a, \varrho) = \Phi_{in}(\varrho) - Y_{in}^{(m)}(\varrho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Infolge der Formeln (4), (6) ist aber die Determinante dieses Gleichungssystems von der Form

$$y_{11}^{(0)}(a) \ldots y_{nn}^{(0)}(a)\left(1 + \frac{E}{\varrho}\right).$$

Die rechts stehenden Ausdrücke sind im Bereiche (Ω) infolge der Wahl der Funktionen $\Phi_{in}(\varrho)$ von der Form

$$\frac{\varepsilon_{ik}(\varrho)}{\varrho^{m-1}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ik}(\varrho) \to 0,$$

wenn ϱ auf irgendwelchem Wege in (Ω) unendlich wird.

Indem wir das Gleichungssystem (9) auflösen, erhalten wir auch für die Unbekannten d Ausdrücke derselben Form.

Ziehen wir nun in Betracht, daß m willkürlich gewählt werden kann, so folgt aus den Ungleichungen (2) und (3) die Richtigkeit unserer Behauptung.

Es bleibt nun noch übrig, die Existenz der $n-1$ anderen Lösungen zu beweisen, die samt der erhaltenen das Fundamentalsystem bilden. Den auf der Methode der vollständigen Induktion gegründeten Beweis findet man bei Herrn O. Perron[3]), so daß wir uns enthalten, darauf einzugehen.

Petrograd, 20. Juli 1922.

(Eingegangen am 19. Dezember 1923.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Es sei $k \geqq 4$,

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

eine positiv definite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten und der Determinante D; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mögen rationale Zahlen bedeuten. Für $x > 0$ sei

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} e^{2\pi i(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)},$$

so daß $F(x)$ die über die Gitterpunkte des k-dimensionalen Ellipsoids $Q(m) \leqq x$ erstreckte Summe der „Gewichte" $e^{2\pi i(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)}$ darstellt. In seiner hier (Bd. XIX, S. 300—307) erschienenen, höchst bemerkenswerten Arbeit beweist Herr Walfisz[1]) für $k \geqq 8$

$$(1) \qquad F(x) = \delta \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),$$

wobei $\delta = 1$ oder $= 0$, je nachdem alle α ganzzahlig sind oder nicht.

---

[1]) Auf die folgenden Druckfehler bzw. Irrtümer in der Arbeit von Herrn Walfisz mache ich im Einverständnis mit ihm aufmerksam:

S. 303, Z. 12 v. u. und 8 v. u.	lies $a_{\mu\nu}$ statt $\alpha_{\mu\nu}$.
S. 305, Z. 1	lies (γ) statt (γ_0).
S. 305, Z. 5	lies (b) statt b unter dem zweiten Summenzeichen.
S. 305, Z. 7	lies $\Re(w^{-\frac{1}{2}}) > 0$, $w^{-\frac{k}{2}} = (w^{-\frac{1}{2}})^k$ statt $\Re(w^{-\frac{k}{2}}) > 0$.
S. 305, Z. 12	lies $2\pi i$ statt $2qi$.
S. 305, Z. 19	lies von statt vor.
S. 306, Z. 1 v. u.	füge O hinter dem ersten Gleichheitszeichen ein.

Für $4 \leqq k \leqq 7$ kann er mein altes $O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{k}{k+1}}\right)$ nicht verschärfen; nur im Spezialfall

$$Q(u) = \sum_{\mu=1}^{k} u_\mu^2, \qquad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \tag{2}$$

(wo $F(x)$ die Gitterpunkte in der k-dimensionalen Kugel $Q(m) \leqq x$ zählt) gelingt ihm dies für $5 \leqq k \leqq 7$, nämlich unter Benutzung des Hardyschen (übrigens nur für $k = 5$ gedruckten) Beweises, daß ein gewisses O-Glied — das aus Formel (8) bei Herrn Walfisz — identisch verschwindet; für $k = 4$ hatte ich schon früher $O(x^{\frac{6}{5}})$ durch $O(x^{1+\varepsilon})$ ersetzt, und meine damaligen Überlegungen führen auch unmittelbar zu $O(x \log x)$.

Zu der Walfiszschen Methode werde ich jetzt einen bestimmten Kunstgriff zufügen und damit (1) für alle $k \geqq 5$ im allgemeinen Fall beweisen (hierbei unter anderem im Spezialfall (2) ohne Heranziehung des Hardyschen Satzes). Gleichzeitig werde ich für $k = 4$ das alte $O(x^{\frac{6}{5}})$ durch $O(x \log^2 x)$ ersetzen.

Der Leser braucht die Abhandlung von Herrn Walfisz nicht zu kennen; an ihre Anordnung (und selbst ihren Wortlaut) lehne ich mich tunlichst an.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die $\alpha_{\mu\nu}$ ganz und x alsbald $\geqq 1$.

Für natürliches q und $(p, q) = 1$ setze ich[2])

$$S_{p,q,(\alpha)} = \sum_{(a)=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} Q(a) + 2\pi i (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k)}; \tag{3}$$

der Hauptnenner von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sei H. Mein erstes Ziel heißt dann (als Ersatz von (14) bei Herrn Walfisz): Für $k \geqq 4$ ist

$$F(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{\substack{q \leqq \sqrt{x} \\ q \equiv 0 \pmod H}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(\alpha)}}{q^k} \sum_{0 \leqq n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} + O\left(x^{\frac{k}{4}} \log x\right), \tag{4}$$

wo Σ' bedeutet, daß p zu q teilerfremd ist.

Wenn für ganzzahliges $n \geqq 0$

$$A(n) = \sum_{Q(m)=n} e^{2\pi i (\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)} \tag{5}$$

und für $\Re(s) > 0$

$$\theta(s) = \theta(s, Q, (\alpha)) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} e^{-\pi Q(m) s + 2\pi i (\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)} \tag{6}$$

gesetzt wird, so ist

$$\theta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) e^{-n\pi s},$$

---

[2]) Wie Herr Walfisz schreibe ich (β) für $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

also

$$A(n) = e^{n\pi s}\int_0^1 \theta(s-2ui)\,e^{-2\pi i n u}\,du.$$

Mit $s = \frac{1}{x}$ folgt hieraus wegen (5)

$$(7)\qquad F(x) = \sum_{0\leqq n\leqq x} A(n) = \int_0^1 \theta\left(\frac{1}{x}-2ui\right) \sum_{0\leqq n\leqq x} e^{\frac{n\pi}{x}-2\pi i n u}\,du.$$

Auf das Intervall $0\leqq u\leqq 1$ lege ich alle zu $\sqrt{x}$ gehörigen Fareypunkte $\gamma = \frac{p}{q}$ und füge die Medianten $\frac{p+p'}{q+q'}$ hinzu. Jeder Punkt

$$\gamma = \frac{p}{q}, \qquad 0\leqq p\leqq q\leqq \sqrt{x}, \qquad (p,q) = 1$$

bestimmt eine Teilstrecke $\{\gamma\}$, die von γ bis zu den beiden nächsten Medianten reicht; $\gamma = \frac{0}{1}$ und $\gamma = \frac{1}{1}$ sind in diesem Sinne derselbe Punkt. Verschiebe ich $\{\gamma\}$ so, daß γ in den Nullpunkt fällt, so heiße die entstehende Strecke $\{\gamma_0\}$. Dann ist bekanntlich

$$(8)\quad |u| < \frac{1}{q\sqrt{x}} \text{ in } \{\gamma_0\}, \qquad |u| \geqq \frac{1}{2q\sqrt{x}} \text{ in der Komplementärmenge.}$$

Aus (7) folgt, wenn noch kurz

$$(9)\qquad w = \frac{1}{x} - 2ui, \qquad \varrho = \Re\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{x}{1+4x^2u^2}$$

(das letztere für spätere Zwecke) gesetzt wird,

$$(10)\qquad F(x) = \sum_{\gamma}\int_{\{\gamma_0\}} \theta(w-2\gamma i) \sum_{0\leqq n\leqq x} e^{\frac{n\pi}{x}-2\pi i n(u+\gamma)}\,du.$$

Ferner ergibt sich aus (6) nach der bekannten Thetatransformationsformel

$$\begin{aligned}\theta(w-2\gamma i) &= \sum_{(a)=0}^{q-1}\sum_{(b)=-\infty}^{\infty} e^{-\pi Q(a+bq)(w-2\gamma i)+2\pi i\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu(a_\nu+b_\nu q)}\\ &= \sum_{(a)=0}^{q-1} e^{2\pi i\gamma Q(a)}\sum_{(b)=-\infty}^{\infty} e^{-\pi Q(a+bq)w+2\pi i\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu(a_\nu+b_\nu q)}\\ &= D^{-\frac{1}{2}}q^{-k}\,w^{-\frac{k}{2}}\cdot\sum_{(b)=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\bar{Q}(b-\alpha q)\frac{1}{q^2w}}\sum_{(a)=0}^{q-1} e^{2\pi i\gamma Q(a)+\frac{2\pi i}{q}\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu b_\nu} \qquad (11)\end{aligned}$$

Hierbei ist $\Re(w^{-\frac{1}{2}}) > 0$, $w^{-\frac{k}{2}} = (w^{-\frac{1}{2}})^k$ und $\bar{Q}$ die zu Q inverse Form.

Zunächst werde ich

$$(12)\qquad \sum_{(a)=0}^{q-1} e^{2\pi i\gamma Q(a)+\frac{2\pi i}{q}\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu b_\nu} = O\left(q^{\frac{k}{2}}\right)$$

nachweisen. Es ist

$$\Big|\sum_{(a)=0}^{q-1}\Big|^2 = \sum_{(g),\,(h)=0}^{q-1} e^{2\pi i\gamma(Q(g)-Q(h))+\frac{2\pi i}{q}\sum_{\nu=1}^{k}(g_\nu-h_\nu)b_\nu}.$$

Werden neue Summationsbuchstaben $(h), (l)$ durch $(g) = (h + l)$ eingeführt, so folgt

$$\Big|\sum_{(a)=0}^{q-1}\Big|^2 = \sum_{(l)=0}^{q-1} e^{2\pi i\gamma Q(l)+\frac{2\pi i}{q}\sum_{\nu=1}^{k} l_\nu b_\nu} \sum_{(h)=0}^{q-1} e^{4\pi i\gamma \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu}h_\mu l_\nu}.$$

Die innere Summe ist nur dann von Null verschieden, und zwar $= q^k$, wenn

$$2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu}\, l_\nu \equiv 0, \ldots, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu}\, l_\nu \equiv 0 \pmod q.$$

Dies System von Kongruenzen hat offenbar nur $O(1)$ Lösungen mit $0 \leqq (l) \leqq q-1$. Daher ist in der Tat

$$\Big|\sum_{(a)=0}^{q-1}\Big|^2 = O(q^k),$$

also (12) gültig.

Zur Abkürzung werde

$$(13)\quad S(u) = D^{-\frac{1}{2}} q^{-k} w^{-\frac{k}{2}} \sum_{(b)=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\pi\bar{Q}(b-\alpha q)\frac{1}{q^2 w}} \sum_{(a)=0}^{q-1} e^{2\pi i\gamma Q(a)+\frac{2\pi i}{q}\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu b_\nu}$$

gesetzt. Hierbei ist für $q \equiv 0 \pmod H$ die volle Summe zu nehmen, andernfalls das Glied $(b - \alpha q) = (0)$ wegzulassen. Ich werde zunächst

$$(14)\qquad S(u) = O(x^{\frac{k}{4}})$$

gleichmäßig für unsere w nachweisen.

Aus (9), (12) und (13) folgt

$$S(u) = O\left(q^{-\frac{k}{2}}|w|^{-\frac{k}{2}} \sum_{(b)=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\pi\bar{Q}(b-\alpha q)\frac{\varrho}{q^2}}\right),$$

und hieraus, mit einem nur von Q abhängigen $\tau > 0$,

$$S(u) = O\left(q^{-\frac{k}{2}}|w|^{-\frac{k}{2}} \sum_{(b)=-\infty}^{\infty}{}' e^{-\frac{\varrho\tau}{q^2}\sum_{\nu=1}^{k}(b_\nu-\alpha_\nu q)^2}\right)$$

$$= O\left(q^{-\frac{k}{2}}|w|^{-\frac{k}{2}} \sum_{(b)=0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho\tau}{q^2}\left(b_1+\frac{1}{H}\right)^2-\frac{\varrho\tau}{q^2}\sum_{\nu=2}^{k} b_\nu^2}\right).$$

Nach (8) und (9) ist

$$\frac{\varrho}{q^2} > \frac{x}{q^2+4x} \geqq \frac{1}{5}.$$

Somit ergibt sich aus dem Vorigen

$$S(u) = O\left(q^{-\frac{k}{2}} |w|^{-\frac{k}{2}} \sum_{b_1=0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho\tau}{q^2}\left(b_1+\frac{1}{H}\right)^2}\right) = O\left(q^{-\frac{k}{2}} |w|^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{\varrho\tau}{2H^2q^2}}\right).$$

Wegen $\varrho = \frac{1}{x|w|^2}$ nach (9) ist weiter

$$S(u) = O\left(x^{\frac{k}{4}} (xq^2|w|^2)^{-\frac{k}{4}} e^{-\frac{\tau}{2H^2xq^2|w|^2}}\right) = O\left(x^{\frac{k}{4}}\right).$$

Hieraus leite ich nun

$$\sum_{\gamma} \int_{\{\gamma_0\}} S(u) \sum_{0\leqq n\leqq x} e^{\frac{n\pi}{x} - 2\pi i n(u+\gamma)}\, du = O\left(x^{\frac{k}{4}} \log x\right) \tag{15}$$

her. Für $0 \leqq y \leqq x$ ist

$$\left| \sum_{y\leqq n\leqq x} e^{-2\pi i n u} \right| \leqq \operatorname{Min}\left(x+1, \frac{1}{|\sin \pi u|}\right);$$

also ist nach dem Abelschen Lemma (partielle Summation)

$$\left| \sum_{0\leqq n\leqq x} e^{\frac{n\pi}{x} - 2\pi i n u} \right| \leqq e^{\pi} \operatorname{Min}\left(x+1, \frac{1}{|\sin \pi u|}\right), \tag{16}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{0\leqq n\leqq x} e^{\frac{n\pi}{x} - 2\pi i n u} \right| du = O\left(\int_0^{\frac{1}{x}} (x+1)\, du + \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u}\right) = O(\log x).$$

Wegen (14) und weil $u+\gamma$ auf der Gesamtheit der $\{\gamma_0\}$ modulo 1 von 0 bis 1 läuft, ist (15) bewiesen.

(10) liefert wegen (3), (11), (13), (15)

$$F(x) = \frac{1}{|D|} \sum_{\substack{q\leqq\sqrt{x} \\ q\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, H)}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(\alpha)}}{q^k} \int_{\{\gamma_0\}} w^{-\frac{k}{2}} \sum_{0\leqq n\leqq x} e^{\frac{\pi n}{x} - 2\pi i n\left(u+\frac{p}{q}\right)}\, du + O\left(x^{\frac{k}{4}} \log x\right) \tag{17}$$

Wird in jedem Integral der Weg $\{\gamma_0\}$ durch $-\infty \ldots \infty$ ersetzt, so ist nach (16) und (8) jedesmal der Fehler

$$O\int_{\frac{1}{2q\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}}} \operatorname{Min}\left(x, \frac{1}{\left|\sin \pi\left(u+\frac{p}{q}\right)\right|}\right) + O\int_{\frac{1}{2q\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}}} \operatorname{Min}\left(x, \frac{1}{\left|\sin \pi\left(u-\frac{p}{q}\right)\right|}\right). \tag{18}$$

Ich behaupte, er ist, wenn bei $q > 1$

$$r = \mathrm{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right)$$

gesetzt wird,

(19) $O(x^{\frac{k}{4}})$ bei $q = 1$, $O(q^{\frac{k}{2}} \log x + q^{\frac{k}{2}-1} x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} r)$ bei $q > 1$.

Dies braucht nur bei dem zweiten Integral in (18) gezeigt zu werden; denn das erste ist bei $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$ das gleiche und bei $\frac{p}{q} \neq \frac{0}{1}$ gleich dem zweiten mit $q - p$ an Stelle von p. In der Tat ergibt sich

$$\int_{\frac{1}{2q}}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}}} \mathrm{Min}\left(x, \frac{1}{\left|\sin \pi\left(u - \frac{p}{q}\right)\right|}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2q}+\lambda}^{\frac{1}{2q}+\lambda+1}$$

$$\leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2q}+\lambda\right)^{\frac{k}{2}}} \int_0^1 \mathrm{Min}\left(x, \frac{1}{|\sin \pi u|}\right) du = O(q^{\frac{k}{2}} \log x);$$

ferner, falls $q = 1$,

$$\int_{\frac{1}{2q\sqrt{x}}}^{\frac{1}{2q}} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}}} \mathrm{Min}\left(x, \frac{1}{\left|\sin \pi\left(u - \frac{p}{q}\right)\right|}\right) \leqq \int_{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}} \sin \pi u} = O \int_{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}+1}} = O(x^{\frac{k}{4}});$$

falls $q > 1$, wegen $\frac{p}{q} > \frac{p}{q} - u \geqq \frac{p}{2q}$, $\frac{1}{\left|\sin \pi\left(u - \frac{p}{q}\right)\right|} = O(r)$,

$$\int_{\frac{1}{2q\sqrt{x}}}^{\frac{1}{2q}} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}}} \mathrm{Min}\left(x, \frac{1}{\left|\sin \pi\left(u - \frac{p}{q}\right)\right|}\right) = O\left(r \int_{\frac{1}{2q\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{k}{2}}}\right) = O(q^{\frac{k}{2}-1} x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} r).$$

(19) ist also bewiesen. Wegen der für $q \equiv 0 \pmod H$ in (12) enthaltenen Relation

$$S_{p,q,(\alpha)} = O(q^{\frac{k}{2}})$$

ergibt sich daher: Wenn jedes $\int_{\{\gamma_0\}}$ durch $\int_{-\infty}^{\infty}$ ersetzt wird, ist der im Hauptgliede der rechten Seite von (17) gemachte Fehler

$$O(x^{\frac{k}{4}}) + O \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{q^{\frac{k}{2}}}{q^k} \left(q \cdot q^{\frac{k}{2}} \log x + q^{\frac{k}{2}-1} x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{q-1} r\right)$$

$$= O(x^{\frac{k}{4}}) + O\left(\log x \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} q\right) + O\left(x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \log q\right) = O(x^{\frac{k}{4}} \log x).$$

Nach der bekannten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\left(\frac{1}{x}-2ui\right)^{\frac{k}{2}}} e^{-2\pi i n u} = e^{-\frac{\pi n}{x}} \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1}$$

ist damit (4) bewiesen.

Das etwaige (genau im Falle $\delta = 1$ auftretende) Glied mit $q = 1$ mal dem Faktor davor liefert wegen

$$\sum_{0 \leqq n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} = \frac{1}{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

das Hauptglied der rechten Seite von (1) $+ O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$. Wegen

$$\left| \sum_{n=m_1}^{m_2} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} \right| < r \qquad (\text{für } m_2 \geqq m_1)$$

ist

$$\left| \sum_{0 \leqq n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} \right| < r x^{\frac{k}{2}-1};$$

die Glieder mit $q \geqq 2$ der Summe in (4) mal dem Faktor davor sind also insgesamt

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-1} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p=1}^{q-1} r\right) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} q^{-\frac{k}{2}+1} \log q\right) = \begin{cases} O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \text{ für } k > 4, \\ O(x \log^2 x) \text{ für } k = 4. \end{cases}$$

Damit ergibt sich im Falle $k > 4$ die Behauptung (1) und im Falle $k = 4$

$$F(x) = \delta \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2 + O(x \log^2 x).$$

Göttingen, den 24. Februar 1924.

(Eingegangen am 26. Februar 1924.)

Ein Beitrag zur Theorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges.

Von

Paul Urysohn in Moskau.

---

1. Der Einfachheit wegen betrachten wir nur *beschränkte* Gebiete, obschon unsere Betrachtungen ohne weiteres auf alle Gebiete mit beschränkter Grenze anwendbar sind.

Nach Hausdorff[1]) *nennt man ein zusammenhängendes Gebiet k-fach zusammenhängend, wenn seine Grenze* (oder sein Komplement[2])) *k Komponenten*[3]) *hat*; k ist entweder eine natürliche Zahl oder $\aleph_0$ oder $2^{\aleph_0}$.[4]) Der Vorteil der Hausdorffschen Definition gegenüber den früheren, die entweder von Polygonen, die in G liegen und Grenzpunkte von G umschließen[5]), oder von G nicht zerstückelnden Querschnitten ausgingen, besteht in der Unterscheidung der beiden Fälle $k = \aleph_0$ und $k = 2^{\aleph_0}$; sonst sind aber alle erwähnten Definitionen untereinander äquivalent.

Die Fälle unendlich hohen Zusammenhanges waren bis jetzt noch sehr wenig untersucht. Im zitierten Hausdorffschen Buche finden wir nur folgende Bemerkung[1]): „Ist k hingegen unendlich, so lassen sich beliebig viele sukzessive Querschnitte $W, W', W'', \ldots$ ziehen, ohne G zu zerstückeln; die verbleibenden Gebiete $G', G'', G''', \ldots$ sind immer noch k-fach zusammenhängend. Es wäre aber falsch, zu sagen, daß man unendlich viele Querschnitte ziehen kann, ohne G zu zerstückeln, denn die schließlich übrigbleibende Menge $\mathfrak{D}(G, G', G'', \ldots)$ braucht weder ein Gebiet noch zusammenhängend zu sein."

In der Tat kann man leicht Beispiele konstruieren, die eine der genannten (oder beide) Möglichkeiten realisieren. Daher ist die Haus-

---

[1]) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 351.

[2]) Beide Bedingungen sind identisch: l. c. S. 345, XI.

[3]) l. c. S. 245.

[4]) l. c. S. 321.

[5]) Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. 73 (1913), S. 325, Fußnote.

dorffsche Behauptung jedenfalls richtig, wenn man sie als Hinweis versteht, daß beim sukzessiven Ziehen von *irgendwelchen* nicht zerstückelnden Querschnitten man im allgemeinen von der Restmenge nichts behaupten kann; und daß die dieser Bemerkung vorhergehende Schlußweise keineswegs ausreicht, um behaupten zu können, daß „man unendlich viele Querschnitte ziehen kann, ohne G zu zerstückeln"; daß also letztere Behauptung, wenn auch richtig, jedenfalls eines speziellen Beweises bedarf. Ich will aber zeigen, daß die genannte Behauptung wirklich *richtig* ist, und daß man sogar abzählbar viele Querschnitte immer so wählen kann, daß die Restmenge in *ein einfach zusammenhängendes Gebiet* sich verwandelt.

2. Ich werde sogar den viel schärferen Satz beweisen, den man folgendermaßen formulieren kann:

Satz. *Zu jedem zusammenhängenden beschränkten ebenen Gebiete G kann man ein System von (endlich oder abzählbar vielen) geradlinigen, sich paarweise nicht schneidenden Querschnitten $J_1, J_2, \ldots$ derart finden, daß $G - \Sigma J_n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.*

Jedes J_n ist also, der üblichen Definition eines Querschnittes zufolge, eine *geradlinige* Strecke, deren innere Punkte in G, deren Endpunkte aber auf der Grenze von G liegen. J_n und J_m $(n \neq m)$ dürfen sich, unserer Voraussetzung gemäß, nicht schneiden; auch kann, da J_n und J_m Querschnitte sind, ein Endpunkt von J_n nicht mit einem inneren Punkte von J_m zusammenfallen; aber der Fall eines gemeinsamen Endpunktes wird nicht ausgeschlossen.

Wegen der Forderung der Geradlinigkeit ist unser Satz sogar für endlich-vielfach zusammenhängende Gebiete neu; was aber seine Tragweite im allgemeinen Falle betrifft, so sei nur bemerkt, daß

1. wir mit $\aleph_0$ Querschnitten auch dann auskommen, wenn $k = 2^{\aleph_0}$ ist;

2. bei einem Gebiete von unendlich hohem Zusammenhange auch solche Komponenten der Grenze vorkommen können, die keinen einzigen vom Gebiete aus erreichbaren Punkt enthalten; auf einer solchen Komponente kann also überhaupt kein (also erst recht kein geradliniger) Querschnitt endigen[6]).

---

[6]) Als Beispiel eines solchen Gebietes kann man die (offene) Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 4$, aus der man abzählbar viele Kurvenbögen $C_0, C_1, C_2, \ldots$ ausgeschnitten hat, wählen; dabei bedeutet C_0 die Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$ der x-Achse, C_{2n-1} den Bogen $x \geqq -1$ der Ellipse $\dfrac{x^2}{1+\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2} = 1$ und C_{2n} den Bogen $x \leqq 1$ der Ellipse $\dfrac{x^2}{1+\left(\frac{1}{2n}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} = 1$: die Komponente C_0 der Grenze dieses Gebietes enthält, in der Tat, keinen einzigen erreichbaren Punkt.

Diese Bemerkungen weisen, glaube ich, deutlich genug darauf hin, daß die Kompliziertheit des folgenden Beweises durchaus in der Natur der Sache liegt.

3. Ein Hilfssatz über (A)-Systeme reeller Zahlen[7]).

Hilfssatz: Es sei

$$\varrho,\ \varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_{00},\ \varrho_{01},\ \varrho_{10},\ \varrho_{11},\ \ldots,\ \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots \tag{1}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots; \quad i_n = 0 \text{ oder } 1)$$

ein System reeller nicht-relativer Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß für jede Indizesfolge

$$i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots \tag{2}$$

die zugehörigen Zahlen

$$\varrho,\ \varrho_{i_1},\ \varrho_{i_1 i_2},\ \ldots,\ \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots$$

eine abnehmende

$$\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k} \geqq \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}} \tag{3}$$

gegen 0 konvergierende

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k} = 0 \tag{4}$$

Folge bilden; dann konvergiert die ganze Folge (1) gegen 0.

Beweis. Wenn wir mit A die Menge aller Zahlen (1) bezeichnen, mit $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ aber die Menge derjenigen unter ihnen, deren Indizesfolge mit $i_1 i_2 \ldots i_k$ anfängt, so ist offenbar

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}) + A_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} + A_{i_1 i_2 \ldots i_k 1};$$

wenn wir daher mit α bzw. $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ den *Limes superior* der Zahlenfolge A bzw. $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ bezeichnen, so ist entweder

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}$$

oder

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}.$$

Wir können also die Indizes $i_1, i_2, \ldots$ sukzessive so wählen, daß, für die so entstandene Folge (2),

$$\alpha = \alpha_{i_1} = \alpha_{i_1 i_2} = \ldots = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \ldots \tag{5}$$

---

[7]) Aus dem Wortlaute des Hilfssatzes kann man sofort ersehen, was wir hier unter einem (A)-Systeme verstehen. Im Falle eines allgemeinen (A)-Systems $\{Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$ (die $Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sind irgendwelche Dinge), nehmen die Indizes i_n nicht nur die Werte 0 und 1, sondern alle ganzen nicht negativen (bzw. positiven) Werte an. Die Kenntnis der Theorie der (A)-Systeme und (A)-Mengen ist jedoch für das folgende keineswegs erforderlich.

sei. Nun folgt aber aus (3), daß

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \leqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_k} \tag{6}$$

ist, was wegen (4) und (5), $\alpha = 0$, d. h. unsere Behauptung zur Folge hat.

4. Ein Hilfssatz über nichtzusammenhängende abgeschlossene Mengen.

Nach Hausdorff[8]) nennt man eine Menge M *σ-zusammenhängend*, falls $\varrho(A, B) \leqq \sigma$ bei *jeder* Zerspaltung $M = A + B$ ist; dabei bedeutet $\varrho(A, B)$ den *Abstand* zwischen A und B, d. h. die untere Schranke der Entfernungen zwischen einem Punkte x von A und einem Punkte y von B.[9])

Es sei nun F eine abgeschlossene und beschränkte, also in sich kompakte[10]) ebene Punktmenge; dann gilt der

Hilfssatz. Wenn F nicht zusammenhängend ist, so kann man eine Zahl $\varrho > 0$ und eine Zerspaltung $F = F_0 + F_1$ derart bestimmen, daß F_0 und F_1 ϱ-zusammenhängende abgeschlossene Mengen sind, deren Abstand $= \varrho$ ist:

$$\varrho(F_0, F_1) = \varrho. \tag{7}$$

Beweis. In unserem Falle gibt es eine *kleinste* Zahl ϱ derart, daß F noch ϱ-zusammenhängend ist[11]); außerdem gibt es nur *endlich viele* Zerspaltungen $F = A + B$, bei denen $\varrho(A, B) > \frac{\varrho}{2}$ ausfällt[11]). Daraus folgert man leicht, daß es Zerspaltungen mit $\varrho(A, B) = \varrho$ tatsächlich gibt, aber auch nur endlich viele. Unser Ziel ist, zu beweisen, daß es zwischen diesen *„ϱ-Zerspaltungen“* solche gibt, bei denen die Mengen A und B ϱ-zusammenhängend sind: daß diese Mengen abgeschlossen sind, ist ja selbstverständlich.

Es sei nun

$$F = A_1 + B_1$$

irgendeine ϱ-Zerspaltung. Wenn A_1 und B_1 ϱ-zusammenhängend sind, ist unsere Behauptung bewiesen; wenn nicht, so läßt z. B. A_1 eine Zerlegung $A_1 = A_2 + A_2^*$ mit $\varrho(A_2, A_2^*) > \varrho$ zu. Dann ist

$$F = A_2 + (A_2^* + B_1) = A_2 + B_2$$

eine neue ϱ-Zerspaltung, in der $A_2 \subset A_1$ ist. Wenn A_2 noch nicht ϱ-zusammenhängend ist, können wir in derselben Weise eine dritte ϱ-Zerspaltung $F = A_3 + B_3$ mit $A_3 \subset A_2$ finden, usw. Dieses Verfahren muß

[8]) l. c. S. 298.

[9]) Hausdorff bezeichnet diese Zahl mit $\delta(A, B)$ und nennt sie „untere Entfernung“.

[10]) l. c. S. 329 u. 264.

[11]) l. c. S. 301.

aber nach endlich vielen Schritten ein Ende nehmen; dabei erhalten wir eine ϱ-Zerspaltung

$$F = A_n + B_n,$$

bei der wenigstens die erste Menge ϱ-zusammenhängend ist. Wenn dasselbe auch von B_n gilt, ist unsere Behauptung bewiesen; im entgegengesetzten Falle zerfällt B_n in endlich viele ϱ-*Komponenten*[12]) $C_1, C_2, \ldots, C_m$, d. h. in ϱ-zusammenhängende Mengen, deren gegenseitige Abstände $\varrho(C_i, C_k)$ sämtlich $> \varrho$ sind. Nun ist $\varrho(C_i, A_n)$ für jedes i gleich ϱ; denn sonst würde

$$F = C_i + (A_n + C_1 + \ldots + C_{i-1} + C_{i+1} + \ldots + C_m)$$

keine ϱ-zusammenhängende Menge sein. Da aber die Summe zweier ϱ-zusammenhängender Mengen, deren Abstand $= \varrho$ ist, offenbar auch eine ϱ-zusammenhängende Menge bildet, so erkennen wir schrittweise, daß jede der Meugen

$$A_n, \quad A_n + C_1, \quad A_n + C_1 + C_2, \quad \ldots, \quad A_n + C_1 + C_2 + \ldots + C_{m-1}$$

ϱ-zusammenhängend, also daß

$$F = (A_n + C_1 + \ldots + C_{m-1}) + C_m$$

eine Zerspaltung der gewünschten Art ist. W. z. b. w.

5. Entwicklung einer abgeschlossenen Menge in ein (A)-System[7]).

Es sei F wiederum eine abgeschlossene beschränkte Menge. Wenn sie zusammenhängend ist, setzen wir $F = F_0 = F_1$ und $\varrho = 0$; sonst soll aber

$$F = F_0 + F_1$$

die soeben gewonnene Zerspaltung sein, bei der also

$$\varrho(F_0, F_1) = \varrho \tag{7}$$

und F_0 und F_1 ϱ-zusammenhängende Mengen sind. Es ist zu bemerken, daß (7) auch im ersten Falle richtig ist, und daß F in beiden Fällen ϱ-zusammenhängend ist.

Mit F_0 und F_1 verfahren wir in derselben Weise; wir erhalten dabei zwei Zerlegungen

$$F_0 = F_{00} + F_{01} \quad \text{und} \quad F_1 = F_{10} + F_{11}$$

und zwei dazugehörige Zahlen, ϱ_0 und ϱ_1; dabei sind $F_{i_1 0}$ und $F_{i_1 1}$ ($i_1 = 0$ oder 1) entweder identisch oder elementenfremd, ferner

$$\varrho(F_{i_1 0}, F_{i_1 1}) = \varrho_{i_1}$$

---

[12]) l. c. S. 299.

und jede der drei Mengen F_{i_1}, $F_{i_1 0}$, $F_{i_1 1}$ ϱ_{i_1}-zusammenhängend. Außerdem ist ϱ_{i_1} die *kleinste* Zahl, bei der F_{i_1} ϱ_{i_1}-zusammenhängend ist, woraus folgt, daß $\varrho_{i_1} \leqq \varrho$ ist.

Mit den gewonnenen Mengen $F_{i_1 i_2}$ verfahren wir in derselben Weise, usw.; wir erhalten ein (A)-System von abgeschlossenen Mengen

$$F, F_0, F_1, F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, \ldots, F_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots \tag{8}$$

und ein dazugehöriges (A)-System (1) reeller nicht-negativer Zahlen; dabei ist

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_k} = F_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} + F_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}, \tag{9}$$

$$\varrho(F_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}, F_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}) = \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}; \tag{10}$$

ferner ist $F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}$-zusammenhängend, und $\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ die kleinste derartige Zahl, woraus folgt, daß die Relation (3) des § 3 erfüllt ist.

6. Ich will jetzt zeigen, daß dasselbe auch von der Relation (4), und zwar für jede Indizesfolge (2) gilt; d. h. daß der Hilfssatz des § 3 in unserem Falle anwendbar ist.

In der Tat, wenn (4) für irgendeine Indizesfolge nicht erfüllt wäre, so könnten wir mittels einer Umnumerierung erreichen, daß dies für die Folge

$$0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

zutreffe. Dann wären alle Zahlen $\varrho_{00\ldots0}$ größer als eine gewisse positive Zahl α, d. h. es wäre

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho(F_0, F_1) > \alpha \\ \varrho(F_{00}, F_{01}) > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho(F_{00\ldots00}, F_{00\ldots01}) > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{11}$$

Nun ist aber $F_{01} \subset F_0$, $F_{001} \subset F_{00} \subset F_0$, usw.; anderseits folgt allgemein aus $B \subset C$, daß

$$\varrho(A, B) \geqq \varrho(A, C)$$

ist. Die Ungleichungen (11) hätten also zur Folge, daß die abzählbar vielen Mengen

$$F_1, F_{01}, F_{001}, \ldots, F_{00\ldots01}, \ldots$$

paarweise einen Abstand $> \alpha$ hätten, was wegen der Beschränktheit von F offenbar unmöglich ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; die Folge (1) strebt also in unserem Falle gegen 0.

7. Es sei $F_{i_1 i_2 \dots i_k}$ eine Menge aus dem Systeme (8), die nicht zusammenhängend ist. Um die Schreibweise etwas abzukürzen, werde ich die Indizesfolge $i_1 i_2 \dots i_k$ [13]) durch einen $*$ ersetzen: F_{*0} soll also $F_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ bedeuten. Im gegenwärtigen Falle sind F_{*0} und F_{*1} elementenfremde in sich kompakte Mengen; man kann folglich [14]) einen Punkt p_{*0} aus F_{*0} und einen Punkt p_{*1} aus F_{*1} derart wählen, daß

$$\varrho(p_{*0}, p_{*1}) = \varrho(F_{*0}, F_{*1}) = \varrho_*, \tag{12}$$

d. h. daß die geradlinige (abgeschlossene) Strecke

$$\Delta_* = \overline{p_{*0} p_{*1}}$$

die kürzeste Verbindungslinie zwischen F_{*0} und F_{*1} sei. Die zugehörige *offene* Strecke

$$J_* = \Delta_* - (p_{*0} + p_{*1}) \tag{13}$$

ist also zu $F_{*0} + F_{*1} = F_*$ fremd; sie ist es aber auch zu $F - F_*$, denn letztere Menge genügt offenbar der Ungleichung

$$\varrho(F - F_*, F_*) \geqq \varrho_*, \text{ [15])}$$

während jeder Punkt der Strecke Δ_*, deren Länge $= \varrho_*$ ist, und deren beide Endpunkte auf F_* liegen, evidentermaßen nicht mehr als um $\frac{1}{2}\varrho_*$ von F_* entfernt sein kann. Es ist also

$$J_* \cdot F = 0, \quad \Delta_* \cdot F = p_{*0} + p_{*1}, \tag{14}$$

d. h. die Endpunkte der Strecke Δ_* liegen auf F, ihre inneren Punkte aber außerhalb F.

8. Wenn wir dieselbe Konstruktion für jede nicht zusammenhängende Menge F_* ausführen, bei zusammenhängendem F_* aber $\Delta_* = J_* = 0$ setzen, erhalten wir ein System von abgeschlossenen

$$\Delta, \Delta_0, \Delta_1, \Delta_{00}, \dots, \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}, \dots \tag{15}$$

---

[13]) Die leere Menge ist auch als eine (die Menge F definierende) Indizesfolge zu betrachten.

[14]) Hausdorff, l. c. S. 292.

[15]) Es ist sogar für jede Indizesfolge $i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}$

$$\varrho(F - F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}, F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}) \geqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Wir können nämlich voraussetzen, daß $\varrho_{i_1 i_2 \dots i_k} > 0$ ist; dann ist aber, wenn man allgemein unter j_n die Zahl $1 - i_n$ versteht,

$$F - F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} = F_{j_1} + F_{i_1 j_2} + F_{i_1 i_2 j_3} + \dots + F_{i_1 i_2 \dots i_k j_{k+1}}$$

und, für jedes $n \leqq k$

$$\varrho(F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}, F_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1}}) \geqq \varrho(F_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}, F_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1}})$$
$$= \varrho_{i_1 i_2 \dots i_n} \geqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

bzw. offenen

$$J,\ J_0,\ J_1,\ J_{00},\ \ldots,\ J_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots \tag{16}$$

Strecken, deren Längen (1) gegen 0 konvergieren (§ 6).

Ich will jetzt zeigen, daß zwei verschiedene Strecken Δ_* höchstens einen gemeinsamen *Endpunkt* haben können. Daß ein Endpunkt der einen nicht mit einem inneren Punkte der anderen zusammenfallen kann, folgt schon aus dem letzten Ergebnisse des vorigen Paragraphen; es handelt sich also darum, zu zeigen, daß zwei Strecken Δ_* sich nicht *schneiden* können. Wir dürfen natürlich voraussetzen, daß keine der beiden Strecken leer ist.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1. Die Indizesfolge der zweiten Strecke beginnt mit der vollen Indizesfolge der ersten, etwa so:

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \quad \text{und} \quad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_{k+l}} \qquad (k \geqq 0,\ l \geqq 1);$$

oder wenn wir, was der Symmetrie wegen erlaubt ist, $i_{k+1} = 0$ voraussetzen und eine der früheren analoge Schreibweise benutzen,

$$\Delta_* \quad \text{und} \quad \Delta_{*0*'}.$$

Die Strecke Δ_* hat eine Länge $= \varrho_*$; einer ihrer Endpunkte, p_{*0}, gehört zur Menge F_{*0}, der andere, p_{*1}, zu F_{*1}. Die Länge der Strecke $\Delta_{*0*'}$ ist $= \varrho_{*0*'}$; ihre Endpunkte $p_{*0*'0}$ und $p_{*0*'1}$ gehören bzw. zu den Mengen $F_{*0*'0}$ und $F_{*0*'1}$, also beide zur Menge F_{*0}. Nun ist aber

$$\varrho(p_{*1},\ F_{*0}) \geqq \varrho(F_{*1},\ F_{*0}) = \varrho_*,$$

woraus folgt, daß beide Endpunkte von $\Delta_{*0*'}$ wenigstens um ϱ_* von p_{*1} entfernt sind:

$$\varrho(p_{*0*'0},\ p_{*1}) \geqq \varrho_*, \qquad \varrho(p_{*0*'1},\ p_{*1}) \geqq \varrho_*. \tag{17}$$

Da andererseits die Mengen $F_{*0*'0}$ und $F_{*0*'1}$ zueinander fremd sind (sonst wäre ja $\Delta_{*0*'} = 0$), gehört der Punkt p_{*0} wenigstens einer dieser Mengen nicht an (obschon er außerhalb ihrer Summe liegen kann); wir können voraussetzen, daß z. B. p_{*0} außerhalb $F_{*0*'0}$ liegt, also zur Menge $F - F_{*0*'0}$ gehört. Wir haben aber gesehen[15]), daß

$$\varrho(F - F_{*0*'0},\ F_{*0*'0}) \geqq \varrho_{*0*'};$$

folglich ist

$$\varrho(p_{*0},\ p_{*0*'0}) \geqq \varrho_{*0*'}. \tag{18}$$

Wenn wir jetzt um p_{*1} einen Kreis mit dem Radius ϱ_* legen, so wird p_{*0} auf seiner Peripherie und $p_{*0*'0}$ und $p_{*0*'1}$ jedenfalls (zufolge (17)) nicht in seinem Inneren liegen. Wenn also Δ_* und $\Delta_{*0*'}$ einen Schnitt-

punkt q hätten, so wäre $\overline{q p_{*0}}$ die kürzeste Verbindungsstrecke von q mit der Kreisperipherie, woraus

$$\varrho(q, p_{*0}) \leqq \varrho(q, p_{*0*'1}),$$

als auch

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho(p_{*0*'0}, p_{*0}) \leqq \varrho(p_{*0*'0}, q) + \varrho(q, p_{*0}) \leqq \varrho(p_{*0*'0}, q) + \varrho(q, p_{*0*'1}) \\ = \varrho(p_{*0*'0}, p_{*0*'1}) = \varrho_{*0*'} \end{cases}$$

folgen würde. Wegen (18) müßten folglich in (19) überall die Gleichheitszeichen gelten, was aber nur dann möglich, wenn beide Strecken auf derselben Geraden liegen. Im letzteren Falle folgt aber sofort aus (17), daß beide Strecken höchstens einen gemeinsamen *Endpunkt* haben können. Damit ist unsere Behauptung im Falle 1 bewiesen.

2. Im entgegengesetzten Falle sind die Indizesfolgen der beiden Strecken bis zu einer k-ten ($k \geqq 0$) Stelle identisch, an der $(k+1)$-ten Stelle aber verschieden, etwa folgendermaßen:

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 0 i_{k+2} \dots i_{k+l}} \quad \text{und} \quad \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k 1 i'_{k+2} \dots i'_{k+m}} \quad (k \geqq 0,\ l \geqq 1,\ m \geqq 1)$$

oder

$$\Delta_{*0*'} \quad \text{und} \quad \Delta_{*1*''}.$$

Wir können voraussetzen, daß $\varrho_* > 0$ ist (denn sonst wären beide Strecken leer), und (aus Symmetriegründen) daß

$$(20)\qquad \varrho_{*1*''} \geqq \varrho_{*0*'}$$

ist. Es genügt jetzt im vorhergehenden Beweise

$$p_{*0},\ p_{*1},\ \varrho_*; \quad p_{*0*'0},\ p_{*0*'1},\ \varrho_{*0*'}$$

bzw. durch

$$p_{*1*''0},\ p_{*1*''1},\ \varrho_{*1*''}; \quad p_{*0*'0},\ p_{*0*'1}\ \varrho_{*0*'}$$

zu ersetzen, um ihn wörtlich auf den jetzigen Fall übertragen zu können; es folgen nämlich aus (20) und

$$\varrho(F_{*0*'},\ F_{*1*''}) \geqq \varrho(F_{*0},\ F_{*1}) = \varrho_* \geqq \varrho_{*1*''}$$

die den Ungleichungen (17) und (18) analogen Ungleichungen.

9. Wir betrachten jetzt die Menge

$$(21)\qquad K = F + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1 \dots i_k} J_{i_1 i_2 \dots i_k} = F + \Sigma\Sigma \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

die aus F durch Hinzufügung aller Strecken (16) bzw. (15) entsteht; wir werden zeigen, daß K ein *Kontinuum*, d. h. eine zusammenhängende abgeschlossene Menge ist.

Es sei, in der Tat, x irgendein Punkt, der zur Menge K fremd ist. Da F abgeschlossen ist, so ist der Abstand $\varrho(x, F)$ positiv; wir bezeichnen ihn durch 2λ:

$$\lambda = \frac{1}{2}\varrho(x, F) > 0. \tag{22}$$

Daraus folgt (§ 6), daß es nur eine endliche Anzahl von Strecken Δ_* gibt, deren Längen $\geqq \lambda$ sind; es seien

$$\Delta_{*_1}, \Delta_{*_2}, \ldots, \Delta_{*_n} \tag{23}$$

diese Strecken.

Für jede nicht zu (23) gehörende Strecke Δ_* gilt die Ungleichung

$$\varrho(x, \Delta_*) > \lambda; \tag{24}$$

denn die Länge von Δ_* ist $< \lambda$, während ihre Endpunkte zur Menge F, deren Abstand von x gleich 2λ ist, gehören. Die s Zahlen

$$\lambda_i = \varrho(x, \Delta_{*_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{25}$$

sind aber positiv; wenn wir also die kleinste der $s+1$ Zahlen

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$$

mit μ bezeichnen, so folgt aus (22), (24) und (25), daß

$$\varrho(x, K) \geqq \mu > 0$$

ist; x ist also kein Häufungspunkt von K. Wir sehen folglich, daß K *abgeschlossen* ist.

10. Wenn die abgeschlossene Menge K nicht zusammenhängend wäre, so könnte man sie in zwei abgeschlossene, nicht leere, zueinander fremde Teilmengen

$$K = A_0 + A_1$$

spalten. Ich will zeigen, daß die Annahme der Möglichkeit einer derartigen Zerlegung zu einem Widerspruche führt.

Wir werden sagen, daß eine Menge, die in K enthalten ist und sowohl mit A_0, wie auch mit A_1 gemeinschaftliche Punkte hat, die „Eigenschaft $\mathfrak{P}$" besitzt. Eine zusammenhängende Menge kann offenbar diese Eigenschaft nicht besitzen; das gilt, insbesondere für alle Strecken Δ_*. Wir beweisen jetzt:

1. F besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{P}$. Wenn nämlich $F \subset A_i$ wäre, so würde auch für jede Strecke Δ_* — deren Endpunkte ja zu F gehören — die Inklusion $\Delta_* \subset A_i$ gelten; folglich wäre $K \subset A_i$, also $K = A_i$ und A_{1-i} leer.

2. Wenn $F_{i_1 i_2 \dots i_k} = F_*$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzt, so gibt es ein i_{k+1} derart, daß auch $F_{*i_{k+1}}$ diese Eigenschaft besitzt. Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich

$$F_{*0} \subset A_i, \qquad F_{*1} \subset A_{1-i},$$

also müßte Δ_*, die einen Endpunkt auf F_{*0}, den anderen aber auf F_{*1} hat, die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzen.

Daraus schließen wir auf die Existenz einer Indizesfolge

$$i_1, i_2, \dots, i_k, \dots,$$

die so beschaffen ist, daß sämtliche Mengen $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzen. Da $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ $\varrho_{i_1 i_2 \dots i_n}$-zusammenhängend ist, so folgt hieraus, daß

$$\varrho\,(A_0, A_1) \leqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_n},$$

was wegen $\varrho_{i_1 i_2 \dots i_n} \to 0$ zur Gleichung

$$\varrho\,(A_0, A_1) = 0$$

führt; letztere ist aber für zwei abgeschlossene elementenfremde Mengen unmöglich. Damit ist bewiesen, daß K zusammenhängend ist. W. z. b. w.

11. Wir haben also bewiesen, daß die Hinzufügung der Strecken (16) die Menge F in ein Kontinuum verwandelt. Wir wollen jetzt zeigen, daß das Streckensystem (16) in dieser Hinsicht *irreduzibel* ist, d. h. daß bei Fortlassung einer einzigen Strecke J_* aus der (ersten) Doppelsumme in (21) wir eine Menge $K - J_*$ erhalten werden, die (wohl noch abgeschlossen, aber) nicht mehr zusammenhängend ist.

Wir führen die Mengen

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n} = F_{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+k}} J_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1} \dots i_{n+k}} \tag{26}$$

ein; K_* entsteht also aus F_* durch Hinzufügung aller Strecken, deren Indizesfolge mit $*$ beginnt. Die wörtliche Übertragung des vorhergehenden Beweises zeigt uns, daß auch jedes $K_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ein Kontinuum ist.

Nun folgt aber aus (21) und (26) die für jedes n gültige Mengengleichung

$$K = \sum_{i_1 \dots i_n} K_{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1 \dots i_k} J_{i_1 i_2 \dots i_k}, \tag{27}$$

d. h. K darf als die Vereinigungsmenge der K_* mit n Indizes und der $J_{*'}$ mit $< n$ Indizes betrachtet werden.

Es ist übrigens unmittelbar ersichtlich, daß zwei Glieder K_* und $K_{*'}$ der ersten Summe entweder elementenfremd oder identisch sind. In der Tat, wenn die zugehörigen F_* und $F_{*'}$ elementenfremd sind, so sind es auch, wegen (26) und § 8, die Mengen K_* und $K_{*'}$; im entgegen-

gesetzten Falle sind aber F_* und $F_{*'}$ untereinander identisch und zusammenhängend, also jede Strecke, deren Indizesfolge mit $*$ bzw. $*'$ anfängt, ist leer, woraus

$$K_* = F_* = F_{*'} = K_{*'}$$

folgt. In diesem Falle gibt es eine aus $< n$ Indizes bestehende Indizesfolge $*''$ (der gemeinsame Anfang von $*$ und $*'$), der eine zusammenhängende Menge $F_{*''}$ entspricht. Eine solche Folge wollen wir *singulär* nennen.

Die Glieder der zweiten (Doppel-) Summe in (27) sind jedenfalls paarweise elementenfremd (§ 8); einige von ihnen können aber leer sein. Letzteres trifft wiederum dann und nur dann zu, wenn singuläre Indizesfolgen vorhanden sind.

Wenn also keine singulären Folgen vorkommen, besteht K aus 2^n voneinander verschiedenen Kontinua K_* und

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

nicht leeren Strecken.

Im allgemeinen Falle genügt es, die *primitiv-singulären* Indizesfolgen zu betrachten; darunter verstehen wir solche singuläre Indizesfolgen $i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k$ $(k \leqq n)$, für die $i_1 i_2 \dots i_{k-1}$ nicht mehr singulär ist[16]). Jede singuläre Folge enthält nämlich eine primitiv-singuläre.

Wenn es nur eine primitiv-singuläre Folge $i_1 i_2 \dots i_k$ gibt, so sind in (27) die 2^{n-k} Kontinua

$$K_{i_1 i_2 \dots i_k i'_{k+1} \dots i'_n} \qquad (i'_{k+1} \dots i'_n = 0 \text{ oder } 1)$$

untereinander identisch und die $2^{n-k} - 1$ Strecken

$$J_{i_1 i_2 \dots i_k i'_{k+1} \dots i'_{k+l}} \qquad (0 \leqq l < n-k,\ i'_{k+1} \dots i'_{k+l} = 0 \text{ oder } 1)$$

leer; d. h. K besteht in diesem Falle aus $2^n - (2^{n-k} - 1)$ voneinander verschiedenen Kontinuen und $2^n - 1 - (2^{n-k} - 1)$ nicht leeren Strecken.

Wenn mehrere primitiv-singuläre Folgen vorhanden sind, so wirken sie, wie leicht ersichtlich, *unabhängig* voneinander. Wir kommen also zu folgendem Ergebnisse:

Wenn die erste Summe in (27) eine aus m Komponenten bestehende abgeschlossene Menge $K^{(n)}$ darstellt, so enthält die zweite Summe genau $m - 1$ nicht leere Strecken.

Wenn wir jetzt sukzessive je eine Strecke aus der zweiten Summe in die erste herüberführen, so wird, da die Strecken sowohl miteinander wie auch mit $K^{(n)}$ keine gemeinschaftliche innere Punkte haben, die Kom-

[16]) Die leere Indizesfolge soll, falls singulär, ebenfalls primitiv-singulär heißen.

ponentenzahl der betreffenden abgeschlossenen Menge jedes Mal höchstens um eine Einheit verringert. Es ist also unbedingt nötig, *alle* Glieder der zweiten Summe zu nehmen, um eine zusammenhängende Menge zu erhalten; d. h. K hört auf zusammenhängend zu sein, wenn man daraus eine mit weniger als n Indizes behaftete Strecke J_{*_0} fortläßt. Da n beliebig ist, ist die Irreduzibilität des Streckensystems (16) damit bewiesen.

12. Den bisher bewiesenen Satz können wir folgendermaßen formulieren:

Es sei F eine ebene [17]) abgeschlossene und beschränkte Menge, die kein Kontinuum ist. Es gibt alsdann ein System

$$\mathfrak{S} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots\}$$ [18])

von (endlich oder abzählbar vielen) offenen Strecken J_n, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Länge ϱ_n von J_n strebt gegen Null.

2. Jede Strecke des Systems liegt außerhalb F, ihre beiden Endpunkte aber auf F.

2a. Die beiden Endpunkte von J_n gehören verschiedenen Komponenten der Menge F an.

3. Zwei verschiedene Strecken aus $\mathfrak{S}$ schneiden sich nicht.

4. $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n$ ist ein Kontinuum.

5. Das System $\mathfrak{S}$ ist in bezug auf die letzte Eigenschaft *irreduzibel* (d. h. $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$ ist für kein k ein Kontinuum).

Ein Vergleich mit dem Beweise in § 9 läßt übrigens leicht erkennen, daß die *Abgeschlossenheit* von $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n$ schon aus den beiden Tatsachen 1. und 2. folgt. Daraus folgt insbesondere, daß auch die Menge $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$ abgeschlossen ist. Die Eigenschaft 5. besteht also darin, daß diese Menge für kein k *zusammenhängend* ist.

Es sei noch bemerkt, daß die beiden Endpunkte p_k und q_k der Strecke J_k zu *verschiedenen* Komponenten der Menge $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$ gehören [19]). In der Tat, wäre das nicht der Fall, so könnten wir

$$F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k = A_1 + A_2 \tag{28}$$

[17]) Der Satz ist übrigens auf eine in einem n-dimensionalen Euklidischen Raume gelegene Punktmenge unmittelbar anwendbar.

[18]) Das System $\mathfrak{S}$ besteht aus allen denjenigen Strecken $J_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, die nicht leer sind.

[19]) Das ist offenbar eine Verschärfung der Bedingung 2a.; letztere folgt also aus 5.

setzen, wo A_1 und A_2 zwei elementenfremde abgeschlossene nicht leere Mengen sind, von denen die erste beide Endpunkte p_k und q_k von J_k enthält. Nun hat aber zufolge 2. und 3. die *abgeschlossene* Strecke

$$\Delta_k = J_k + p_k + q_k$$

mit (28) nur ihre Endpunkte gemein; zu A_2 ist folglich Δ_k fremd. Die beiden abgeschlossenen Mengen A_2 und $A_1 + \Delta_k = A_1 + J_k$ könnten also in diesem Falle keine gemeinsamen Punkte besitzen. Letzteres ist aber unmöglich, da die Vereinigungsmenge

$$A_2 + (A_1 + J_k) = (A_1 + A_2) + J_k = (F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k) + J_k = F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n$$

zusammenhängend ist.

13. Es sei jetzt G ein beschränktes ebenes Gebiet, das zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist. Wir wenden auf seine Grenze F den Satz des vorigen Paragraphen an; wegen der Eigenschaften von G sind alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt.

In erster Linie beweisen wir, daß sämtliche J_n in G liegen. In der Tat ist jede Strecke J_n zu F fremd; sie gehört folglich zur Komplementärmenge $E - F$,[20]) also, da J_n zusammenhängend ist, zu einer Komponente von $E - F$. Nun ist $E - F$ ein Gebiet; dasselbe gilt folglich[21]) auch von seinen Komponenten; G selbst ist eine von diesen Komponenten[22]). Jede andere Komponente G_i von $E - F$ besitzt aber eine *zusammenhängende* Grenze F_i; um das einzusehen, genügt es nämlich[23]) zu beweisen, daß F_i in F enthalten ist. Letzteres ist aber unmittelbar einleuchtend, da ja ein Grenzpunkt von G_i weder zu G_i selbst, noch zu einer anderen Komponente von $E - F$ gehören kann[24]).

Wenn wir nun bemerken, daß beide Endpunkte von J_n (die wegen § 12, 2. nicht in $E - F$ liegen können) jedenfalls zur Grenze derjenigen Komponente von $E - F$ gehören, in der J_n selbst liegt, so folgt aus $F_i \subset F$ und der Bedingung 2a. des vorigen Paragraphen, daß J_n nur in G liegen kann.

Damit ist also (mit Rücksicht auf § 12, 2.) bewiesen, daß $\mathfrak{S}$ ein System von geradlinigen Querschnitten des Gebietes G ist.

---

[20]) Mit E bezeichnen wir die Ebene.

[21]) Hausdorff, l. c. S. 330, II.

[22]) l. c. S. 330, III.

[23]) Siehe a. a. O. S. 346, XII.

[24]) Eine Komponente kann nämlich keinen Häufungspunkt einer anderen Komponente enthalten (l. c. S. 246, V).

14. Wenn wir das letztere Ergebnis mit den Bedingungen des § 12 und dem Satze in § 2 vergleichen, so sehen wir, daß dieser Satz bewiesen sein wird, wenn wir gezeigt haben werden, daß

$$H = G - \Sigma J_n$$

ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

Daß H ein Gebiet ist, folgt schon daraus, daß es aus allen denjenigen Punkten des Gebietes G gebildet ist, die zur abgeschlossenen Menge

$$K = F + \Sigma J_n$$

fremd sind.

Es ist ebenfalls leicht einzusehen, daß K die Grenze von H ist. In der Tat ist

$$\overline{G} = G + F$$

eine abgeschlossene Menge; aus

$$\overline{G} = (G - \Sigma J_n) + (F + \Sigma J_n) = H + K$$

folgt also, daß die Grenze von H in K enthalten ist. Um anderseits zu zeigen, daß *jeder* Punkt von K Grenzpunkt von H ist, betrachten wir irgendeinen Punkt x von K und das Innere S einer beliebig kleinen Kreisscheibe um diesen Punkt. Da x entweder zur Grenze F von G oder zu einer J_n, also zu G selbst gehört, so können wir in S einen zu G gehörenden Punkt y wählen. Nun sind S und G Gebiete, während die J_n höchstens in abzählbarer Menge vorhanden sind. Wir können also eine in S und in G liegende Strecke $\overline{yz}$ derart wählen, daß ihre Richtung von den Richtungen aller J_n verschieden sei. $\overline{yz}$ hat folglich mit jeder J_n höchstens einen Punkt gemein, enthält also sicher einen Punkt w, der zu allen J_n fremd ist. w liegt also in $G - \Sigma J_n = H$ und in S; d. h. Punkte von H sind in jeder Umgebung des Punktes x vorhanden.

Wir haben also bewiesen, daß K die Grenze von H ist. Da K zusammenhängend ist (§ 15, 4.), folgt hieraus, daß H, falls zusammenhängend, auch *einfach* zusammenhängend sein wird. Um unsern Hauptsatz (§ 2) zu beweisen, haben wir also nur noch zu zeigen, daß das Gebiet H zusammenhängend ist.

15. Wir wollen zuerst irgendeinen Querschnitt J_k betrachten und beweisen, daß es nur eine an J_k grenzende Komponente des Gebietes H gibt; d. h. daß nur eine Komponente von H zu J_k gehörende Grenzpunkte besitzt.

Wir bezeichnen mit

$$H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$$

diejenigen Komponenten von H, deren Grenzen zu J_k nicht fremd sind, und betrachten die Menge

$$\Gamma = J_k + \sum H_i. \tag{29}$$

Γ ist ein Gebiet. In der Tat, ein Punkt x von Γ gehört entweder zu einem H_i, — und dann ist er jedenfalls ein innerer Punkt von Γ — oder er gehört zu J_k. In diesem Falle liegt x im Gebiete G und außerhalb der abgeschlossenen (§ 12) Menge

$$K - J_k = F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k; \tag{30}$$

es gibt also eine den Punkt x einschließende offene Kreisscheibe S, die ebenfalls in G und außerhalb $K - J_k$ liegt. Die Strecke J_k zerschneidet S in zwei *zusammenhängende* Teile S_1 und S_2, die beide in G und außerhalb K, also in H liegen. Da sie außerdem beide an J_k grenzen, so kommt

$$S_1 \subset H_{i_1}, \qquad S_2 \subset H_{i_2}$$

(wo i_1 und i_2 zwei gleiche oder verschiedene Indizes sind), also

$$S \subset S_1 + S_2 + J_k \subset H_{i_1} + H_{i_2} + J_k \subset \Gamma;$$

x ist folglich auch jetzt ein innerer Punkt von Γ.

Das Gebiet Γ ist zusammenhängend. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit y_i irgendeinen auf J_k liegenden Grenzpunkt von H_i. Da H_i zusammenhängend ist, so ist es auch $H_i + y_i$,[25]) folglich auch

$$H_i + J_k = (H_i + y_i) + J_k:$$

die beiden zusammenhängenden Mengen $H_i + y_i$ und J_k haben nämlich einen gemeinsamen Punkt y_i.[26]) Wenn nun y irgendein Punkt von J_k ist, so haben die zusammenhängenden Mengen

$$H_i + J_k \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

einen gemeinsamen Punkt y; ihre Vereinigungsmenge

$$\sum_i (H_i + J_k) = J_k + \sum H_i = \Gamma$$

ist folglich[27]) ebenfalls zusammenhängend.

Wir betrachten jetzt die Grenze Φ des zusammenhängenden Gebietes Γ. Ich behaupte, daß sie in der Menge $K - J_k$ enthalten ist. In der Tat ist zufolge (29) jeder Grenzpunkt z von Γ entweder ein Häufungspunkt von ΣH_i, also von $H \supset \Sigma H_i$, oder ein Häufungspunkt von J_k; in beiden Fällen ist z in $H + K$ enthalten. Da nun J_k und die H_i aus *inneren*

[25]) l. c. S. 246, IV.
[26]) Siehe a. a. O. S. 245, II.
[27]) l. c. S. 245, III.

Punkten von Γ bestehen, während die anderen (an J_k nicht grenzenden) Komponenten von H keinen Häufungspunkt von Γ enthalten können[28]), so folgt hieraus tatsächlich, daß

$$\Phi \subset H + K - (J_k + H) = K - J_k.$$

Die beiden Endpunkte p_k und q_k der in Γ liegenden Strecke J_k gehören notwendigerweise zu Φ: sie können ja nicht innerhalb von Γ liegen, da sie sogar zum Gebiete

$$G = H + \sum J_n \supset \sum H_i + J_k = \Gamma$$

fremd sind. J_k ist folglich ein *Querschnitt* von Γ.

Nun gehören aber p_k und q_k zu *verschiedenen* Komponenten von Φ; denn sonst würde es eine p_k und q_k enthaltende zusammenhängende Menge L geben, die in Φ, also in $K - J_k$ enthalten ist; d. h. aus (30) würde folgen, daß p_k und q_k zu derselben Komponente von

$$F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$$

gehören, was aber mit dem letzten Ergebnisse des § 12 im Widerspruch steht.

Aus der soeben bewiesenen Tatsache folgt aber[29]), daß der Querschnitt J_k das Gebiet Γ nicht zerschneidet, also daß das Gebiet

$$\Gamma - J_k = \sum H_i$$

zusammenhängend ist. Die Summe $\sum H_i$ besteht folglich nur aus einem Gliede H_1; H_1 ist die einzige an J_k grenzende Komponente von H. W. z. b. w.

16. Es seien jetzt a und b irgend zwei Punkte von H; sie gehören beide zum zusammenhängenden Gebiete G und können also durch einen innerhalb G liegenden einfachen Streckenzug Π verbunden werden. Nun gehört aber (§ 14) jedes J_k zur Grenze von $H = G - \sum J_n$; in jeder Umgebung eines zu einem J_k gehörenden Punktes x gibt es also Punkte von G, die zu keinem J_n gehören. Mittels einer kleinen Verschiebung der Eckpunkte von Π können wir also erzwingen, daß kein Eckpunkt von Π auf einem J_n liege. In diesem Falle hat Π mit jedem J_n nur endlich viele Punkte gemein.

Andererseits folgt aus den Bedingungen 1. und 2. (§ 12) — da ja der Abstand $\varrho(\Pi, F) > 0$ ist —, daß Π überhaupt nur von endlich vielen J_n getroffen wird. Π wird folglich durch $\sum_{\mathfrak{S}} J_n$ in *endlich viele* Stücke zer-

---

[28]) Jede solche Komponente ist ja zu Γ fremd; und ein Gebiet kann keinen Häufungspunkt eines zu ihm fremden Gebietes enthalten.

[29]) L. c. S. 350, XIII.

legt, von denen jedes in $G - \Sigma J_n = H$, also (da es zusammenhängend ist) in einer Komponente von H liegt. Zwei benachbarte Stücke stoßen aber in einem Punkte y zusammen, der zu einem J_k gehört; aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Hilfssatze folgt also, daß zwei benachbarte Stücke von Π zu *derselben* Komponente von H gehören.

Daraus folgt ohne weiteres, daß a und b zu derselben Komponente von H gehören, und, da a und b beliebige Punkte von H waren, daß H zusammenhängend ist.

Damit ist unser Ziel vollständig erreicht.

Moskau, den 30. Dezember 1923.

(Eingegangen am 25. Februar 1924.)

Die natürliche Geometrie.

Von

M. Pasch in Gießen.

Unter diesem Titel hat Herr J. Hjelmslev in den Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 2 (1923), vier Vorträge veröffentlicht, die er im Juli 1922 in Hamburg gehalten hat. Er bespricht im Eingang den „Gegensatz zwischen den wahrnehmbaren und den abstrakten mathematischen Formen" (a. a. O. S. 1) und stellt dann der „natürlichen Geometrie" die Aufgabe, die „wirklichen räumlichen Eigenschaften der Dinge der Außenwelt" genau zu beschreiben (S. 3). Herr Hjelmslev erwähnt dabei mein Buch: Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, in dem ich ja versucht habe, die Geometrie (unter Ausschluß der krummen Gebilde) empiristisch zu begründen, beanstandet aber mein Axiomensystem als eines, „infolgedessen zwei gerade Linien ohne Ausnahme höchstens einen Punkt gemeinsam haben", weil ein solches „System als empirisches System im voraus durch Protagoras widerlegt ist" (S. 2).

Zu dieser Stelle und zu anderen Ausführungen in den Hjelmslevschen Vorträgen bemerke ich, daß in meinem erwähnten Buche nicht alles, was prinzipielle Bedeutung hat, in den Grundsätzen (die ich jetzt Kernsätze nennen würde) niedergelegt werden konnte. Vielmehr finden sich ausdrückliche Ergänzungen an verschiedenen Stellen des Buches, besonders S. 17 ff., 188 ff. Weitere Ergänzungen finden sich in der zweiten Ausgabe des Buches, 1912. Auf den Gegenstand der eigenartigen Untersuchungen von Hjelmslev bin ich nach der Veröffentlichung von 1882 in verschiedenen Schriften näher eingegangen, deren Titel oder Erscheinungsweise jedoch nicht dazu angetan sein dürften, ihnen im gegenwärtigen Zusammenhang Beachtung zu sichern. Um es daher den Lesern der Hjelmslevschen Vorträge zu ermöglichen, diese Schriften zuzuziehen, stelle ich die Titel hier zusammen:

I. Über die projektive Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde, Math. Annalen 30 (1887).

II. Vorlesungen über neuere Geometrie, zweite Ausgabe, Leipzig und Berlin 1912.

III. Veränderliche und Funktion, Leipzig und Berlin 1914 (§ 19: Die implizite Definition, § 69: Empirismus).

IV. Grundfragen der Geometrie, Journal für Mathematik **147**, Heft 2/3 (1917).

V. Mathematik und Logik, Leipzig 1919.

VI. Die Begründung der Mathematik und die implizite Definition, Annalen der Philosophie **2**, Heft 2 (1920).

VII. Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie, Leipzig 1922.

VIII. Physikalische und mathematische Geometrie, Annalen der Philosophie **3**, Heft 3 (1922).

Es kann nicht meine Absicht sein, auf die in diesen Schriften enthaltenen Beiträge zur Frage der natürlichen Geometrie — die ich schließlich (in Nr. VIII) als physikalische Geometrie der mathematischen gegenübergestellt habe — hier ausführlich zurückzukommen. Ich muß mich vielmehr auf einige wenige Hinweise beschränken.

Herr Hjelmslev sagt (a. a. O. S. 3), daß „die Erfahrungsgeometrie mit metrischen Grundlagen (Eigenschaften der festen Körper) anfangen muß", und (S. 9) daß wir „außer den Axiomen noch ein nicht axiomatisches Erfahrungsmaterial haben, das eine bisher nicht bearbeitete Beigabe zum Axiomensystem bildet". In der Tat habe ich in dem Buche von 1882, obgleich ich mir nur die Begründung der projektiven Geometrie zum Ziel setzte, doch Metrik heranziehen müssen, nämlich den Begriff der kongruenten Figuren, und bin bei deren Betrachtung in § 13 davon ausgegangen, daß feste Körper — besser: starre Körper — vorausgesetzt werden. Die Untersuchung des Begriffs des starren Körpers sowie der Begriffe: Punkt, Linie, Fläche usw., konnte ich erst in neuester Zeit zu einem gewissen Abschluß bringen und darf das in Nr. VII dargestellte Ergebnis als einen Versuch in der von Hjelmslev geforderten Richtung bezeichnen.

Schon in dem Buche von 1882 mußte ich von impliziten Definitionen in dem Sinne, den ich später mehrfach, besonders in der Schrift Nr. VI, erörtert habe, Gebrauch machen. Eine solche implizite Definition ist bei Hjelmslev z. B. die Definition auf S. 18 Nr. 5. Durch diese wird dem Punkte eine stetige Folge von Koordinaten zugeordnet, oder, in der auf S. 25 der Vorträge eingeführten Ausdrucksweise, dem geometrischen Punkt „eine Sammlung von arithmetischen Punkten". Ebendahin führte mich mit Notwendigkeit der Gedankengang des Buches von 1882 in § 23: Die stetige Zahlenreihe in der Geometrie.

In demselben Paragraphen habe ich vom empiristischen Aufbau des Buches dadurch zur gewohnten Auffassung der Geometrie hinüberleiten können, daß ich den Begriff des mathematischen Punktes begründete. Auf diesen Gegenstand bin ich in der Schrift Nr. VIII auf S. 371 zurückgekommen, um der Definition, die wieder eine implizite ist, eine schärfere Fassung zu geben.

Die Abhandlung Nr. I habe ich besonders im Hinblick auf die Stelle über mehrfache Differenzierbarkeit bei Hjelmslev (S. 36 der Vorträge) aufgeführt.

Schließlich ein Wort über den mathematischen Beweis. Ist die Betrachtung des Proklus, die Hjelmslev auf S. 11 bespricht, ein mathematischer Beweis? In der Auffassung vom Wesen des Beweises scheint nicht volle Übereinstimmung zu bestehen; siehe die unter II bis V aufgeführten Schriften, die sich an mehreren Stellen mit dem Wesen des Beweises beschäftigen, zum Teil im Hinblick auf eine im Jahr 1915 erschienene Arbeit von Hjelmslev.

Gießen, Februar 1924.

(Eingegangen am 26. Februar 1924.)

Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme.

Von

Ludwig Berwald und Philipp Frank in Prag.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

definieren die n Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden als Funktionen der Zeit t. In ihnen sind die Q_i, die kovarianten Kraftkomponenten, gegebene Funktionen der q_i. K, die kinetische Energie, ist eine homogene quadratische Funktion der kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}^i$

$$\dot{q}^i = \frac{dq_i}{dt} \tag{2}$$

mit Koeffizienten, die nur von den q_i abhängen.

Für viele Untersuchungen ist es nun wünschenswert, aus der Gl. (1) die Zeit t zu eliminieren und Differentialgleichungen herzuleiten, durch welche die q_i direkt untereinander verknüpft sind. Wenn man die Bewegung des Systems durch die eines darstellenden Punktes im n-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ versinnbildlicht, so sind die Lösungen dieser so gewonnenen Differentialgleichungen die Gleichungen der Bahnkurven des darstellenden Punktes. Wir wollen sie auch in übertragenem Sinn die Bahnkurven unseres Systems nennen. Will man die Darstellung kovariant gestalten, so ist es am besten, die q_i als Funktionen eines willkürlichen Parameters u anzusehen. Dann kann man die Zeit auch als mit den Koordinaten gleichberechtigt behandeln und Differentialgleichungen suchen, die $q_1, \ldots, q_n$ und t als Funktionen von u zu bestimmen gestatten. Die Lösungen dieser Gleichungen bestimmen dann einerseits $q_1, \ldots, q_n$ als Funktion von u, die „Bahnkurven" des Systems, andererseits t als Funktion von u, den zeitlichen Verlauf der Bewegung längs der Bahnkurven.

Besonders einfach und anschaulich gestalten sich die Differentialgleichungen, wenn man an Stelle von t die kinetische Energie K einführt und also ein System von simultanen Differentialgleichungen für die $n+1$ Größen $q_1, \ldots, q_n, K$ als Funktion des Parameters u aus Gl. (1) abzuleiten sucht.

Wir bezeichnen die Ableitungen nach dem Parameter u mit einem Strich, wie die nach t mit einem Punkt bezeichnet wurden, also

$$q'^i = \frac{dq_i}{du}, \qquad t' = \frac{dt}{du}, \qquad \dot{u} = \frac{du}{dt}, \text{ usw.} \tag{3}$$

Ferner sei k das, was aus K wird, wenn an Stelle der $\dot{q}^i$ die q'^i gesetzt werden, also

$$\dot{q}^i = q'^i \dot{u}, \qquad q'^i = \dot{q}^i t', \qquad k = K t'^2 \tag{4}$$

Es seien ferner K_i die kovarianten Impulskomponenten und analog

$$k_i = \frac{\partial k}{\partial q'^i}, \quad \text{also} \quad k_i = t' K_i. \tag{5}$$

Die Lagrangeschen Ausdrücke in bezug auf die unabhängige Veränderliche t sollen mit Λ_i, die in bezug auf u mit λ_i bezeichnet werden, also

$$\Lambda_i(K) \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}, \qquad \lambda_i(k) \equiv \frac{d}{du}\frac{\partial k}{\partial q'^i} - \frac{\partial k}{\partial q_i}. \tag{6}$$

Zur Elimination des t aus den Gl. (1) gehen wir von der aus (4) folgenden Beziehung $\sqrt{k} = t' \sqrt{K}$ aus, die in integrierter Form

$$\int \sqrt{K}\, dt = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{K}\, t'\, du = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{k}\, du \tag{7}$$

lautet. Dabei ist das Integral zwischen zwei festen Werten von u zu erstrecken. Bilden wir die erste Variation dieser Integrale, wobei aber nur die q_i, nicht aber das t variiert wird, also nur die geometrische Gestalt der Bahnkurve, nicht der zeitliche Bewegungsverlauf, und nehmen wir die Variationen δq^i so an, daß sie an den Integrationsgrenzen verschwinden, so folgt aus Gl. (7) in der bekannten Weise

$$\int_{u_0}^{u_1} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(\sqrt{K})\, \delta q^i t'\, du = \int_{u_0}^{u_1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sqrt{k})\, \delta q^i\, du \tag{8}$$

und wegen der Willkürlichkeit der δq^i

$$t' \Lambda_i(\sqrt{K}) = \lambda_i(\sqrt{k}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Aus Gl. (6) folgt:

$$\Lambda_i(\sqrt{K}) = \frac{1}{2\sqrt{K}} \Lambda_i(K) - \frac{1}{4\sqrt{K^3}} \frac{dK}{dt} K_i. \tag{10}$$

Aus den Gl. (1) ergibt sich in bekannter Weise die Energiegleichung

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{h=1}^{n} Q_h \dot{q}^h. \tag{11}$$

Mit Hilfe der Gl. (1), $A_i(K) = Q_i$, Gl. (9), (4), (5), (11) folgt aus (10)

$$\frac{\lambda_i(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2K}\left(Q_i - \frac{k_i}{2k}\sum_{h=1}^{n} Q_h q'^h\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Setzen wir

$$\frac{\lambda_i(\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = G_i, \quad Q_i - \frac{k_i}{2k}\sum_{h=1}^{n} Q_h q'^h = P_i, \tag{13}$$

so sind die P_i Funktionen der q_i und ihrer ersten Ableitungen nach u, die G_i Funktionen derselben Größen und der zweiten Ableitungen. Aus beiden ist die Zeit eliminiert. An Stelle der Bewegungsgleichungen (1) lassen sich also die Gl. (12) und die aus (11) sofort folgende Gleichung

$$\frac{dK}{du} = \sum_{h=1}^{n} Q_h q'^h \tag{14}$$

setzen. Es bilden also Gl. (14) und

$$G_i = \frac{1}{2K} P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

ein System von $n+1$ simultanen Differentialgleichungen für die $n+1$ Größen $q_1, \ldots, q_n, K$ als Funktion von u. Sowohl zwischen den linken als auch den rechten Seiten von (15) bestehen wegen Gl. (13) die Identitäten

$$\sum_{i=1}^{n} P_i q'^i = 0, \qquad \sum_{h=1}^{n} G_h q'^h = 0, \tag{16}$$

daher sind unter den Gl. (15) im Allgemeinen nur $n-1$ voneinander unabhängige. Dafür tritt aber zu ihnen noch eine Differentialgleichung zur Definition des Parameters u, durch deren Hinzufügung erst die Koordinaten der Bahnkurve eindeutige Funktionen von u werden. Die einfachste kovariante Annahme für diese Gleichung wäre $k = 1$.

Für die G_i läßt sich auch eine Gestalt angeben, aus der die zweite Reihe der Identitäten (16) sofort einleuchtet. Wir machen für k den Ansatz

$$k = \frac{1}{2}\sum_{l,m} a_{lm} q'^l q'^m, \tag{17}$$

wo die a_{lm} Funktionen der q_i sind. Dann ist bekanntlich

$$\lambda_i(k) \equiv \sum_{l=1}^{n} a_{il} q''^{l} + \sum_{l,m=1}^{n} \begin{bmatrix} lm \\ i \end{bmatrix} q'^{l} q'^{m}, \tag{18}$$

wo die $\begin{bmatrix} lm \\ i \end{bmatrix}$ die aus den a_{lm} gebildeten Christoffelschen Symbole erster Art sind.

Bilden wir die zu (10) analoge Gleichung für $\lambda_i(\sqrt{k})$, so ergibt sich aus ihr

$$G_i = \frac{\lambda_i(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \equiv \frac{1}{2k}\left(\lambda_i - \frac{k_i}{2k}\sum_{h=1}^{n} \lambda_h q'^{h}\right), \tag{19}$$

wo die λ_i die Ausdrücke (18) bedeuten. Aus Gl. (19) folgen unmittelbar die Identitäten (16) für die G_i.

Die geometrische Bedeutung der Gl. (14), (15) wird sofort klar, wenn man sie für den einfachsten Fall der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene und rechtwinklige Koordinaten bildet. Hier wird

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad Q_1 = X, \quad Q_2 = Y, \quad K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} v^2.$$

Aus Gl. (14) wird dann, wenn wir $x'^2 + y'^2 = 1$ setzen, also die Bogenlänge $u = s$ als Parameter wählen:

$$mv\frac{dv}{ds} = m\frac{dv}{dt} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds},$$

also die Bewegungsgleichung für die Tangentialkomponente der Kraft. In den Gl. (15) wird wegen $\lambda_1 = mx''$, $\lambda_2 = my''$, $k_1 = mx'$, $k_2 = my'$ sowie wegen Gl. (19) und (13)

$$G_1 = x'', \; G_2 = y'', \; P_1 = X - x'(Xx' + Yy'), \; P_2 = Y - y'(Xx' + Yy').$$

Die beiden Gl. (15) sind wegen der Identitäten (16) auf eine reduzierbar. Diese lautet nach geeigneter Zusammenfassung

$$x''y' - y''x' = \frac{1}{2K}(Xy' - Yx'),$$

oder nach Einführung des Krümmungsradius r

$$-\frac{mv^2}{r} = X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds}.$$

Das ist aber die Bewegungsgleichung für die Normalkomponente der Kraft.

Wir können demgemäß auch allgemein die Gl. (14), (15) so auffassen, daß sie der Zerlegung der Kraft in eine Tangential- und eine Normalkomponente entsprechen[1]). Die erste der Identitäten (16) sagt ja

[1]) Ähnliche Gleichungen finden sich auch bei J. E. Wright, Invariants of quadratic differential forms. Cambridge 1908.

aus, daß im Raum des darstellenden Punktes der Vektor P_i auf der Tangente der Bahnkurve senkrecht steht. Der Vektor G_i ist dann der Krümmungsvektor dieser Kurve.

Aus den Gl. (14), (15) lassen sich durch Elimination von K Differentialgleichungen herleiten, die nur die geometrische Gestalt der Bahnkurve bestimmen. Will man diese Elimination symmetrisch durchführen, so folgert man aus (15) zunächst

$$K = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i G^i}{\sum_{i=1}^{n} G_i G^i}. \tag{20}$$

Dabei sind die G^i die kontravarianten Komponenten des Vektors G_i.[2] Aus Gl. (14) folgt dann

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sum_i P_i G^i}{\sum_i G_i G^i}\right) = 2 \sum_h Q_h q'^h. \tag{21}$$

Dazu kommen die aus (15) folgenden Beziehungen

$$\frac{P_1}{G_1} = \frac{P_2}{G_2} = \ldots = \frac{P_n}{G_n}. \tag{22}$$

Die Gl. (21), (22) bilden ein System von n Differentialgleichungen zur direkten Bestimmung der q^i als Funktion von u. Dabei sind in den Gl. (22) die q_i, q'^i, q''^i, in Gl. (21) auch noch die dritten Ableitungen q'''^i enthalten.

Die abgeleitete Gestalt der Differentialgleichungen für die Bahnkurven (14), (15) bzw. (21), (22) gestattet es, viele Eigenschaften dieser Kurven unmittelbar abzulesen und wegen der geometrischen Analogie mit dem einfachen Fall der Bewegung eines Punktes in der Ebene auch anschaulich einleuchtend zu machen. So lassen sich die von Painlevé[3]) bewiesenen Eigenschaften der reellen Bahnkurven fast ohne jede Rechnung einsehen.

Vom mathematischen Standpunkt muß darauf hingewiesen werden, daß die Möglichkeit der kovarianten Elimination der Zeit vor allem auf der Homogenität von K in den $\dot{q}^i$ beruht, was besonders aus Gl. (7) hervorgeht. Es lassen sich alle Betrachtungen auch durchführen, wenn man von den Gl. (1) ausgeht, aber annimmt, daß die dort stehende Funktion K in den $\dot{q}^i$ homogen von m-ten Grade ist, wobei sie nicht ganz und rational zu sein braucht.

---

[2]) Übrigens könnten in Gl. (20), (21) an Stelle der G die kontravarianten Komponenten eines beliebigen Vektors treten.

[3]) P. Painlevé, Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes. Bull. Soc. Math. France 22 (1894), S. 136–184.

Dann tritt an Stelle von (4) und (5)

$$k = K t'^{m}, \qquad k_i = K_i t'^{m-1}. \tag{23}$$

An Stelle von (7) tritt dann

$$\int \sqrt[m]{K}\, dt = \int \sqrt[m]{k}\, du. \tag{24}$$

Aus (9) wird $t' \Lambda_i(\sqrt[m]{K}) = \lambda_i(\sqrt[m]{k})$. Gl. (10) wird zu:

$$\Lambda_i(\sqrt[m]{K}) = \frac{1}{m K^{\frac{m-1}{m}}} \Lambda_i(K) - \frac{m-1}{m^2} \frac{1}{K^{\frac{2m-1}{m}}} \frac{dK}{dt} K_i. \tag{25}$$

Da an Stelle von (11) die Beziehung

$$(m-1)\frac{dK}{dt} = \sum_h Q_h \dot{q}^h \tag{26}$$

tritt, so folgt aus (25)

$$\frac{\lambda_i(\sqrt[m]{k})}{\sqrt[m]{k}} = \frac{1}{m K}\left(Q_i - \frac{k_i}{m k} \sum_h Q_h q'^h\right) \tag{27}$$

genau analog zu Gl. (12).

(Eingegangen am 9. April 1924.)

Berichtigung zu der Abhandlung: Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Bd. 20, S. 7—20.

Von

Otto Hölder in Leipzig.

Auf der letzten Zeile von S. 15 ist aus Versehen die spezielle Form eingesetzt worden, auf die das Liniendifferential nachher, für eine Stelle der Mannigfaltigkeit, transformiert wird. Es ist auf S. 15 noch das allgemeine Liniendifferential gemeint, die Formel also durch

$$\bar{s}_k = \sqrt{\Omega(\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}, \ldots, \bar{x}_{nk})}$$

zu ersetzen. Die unrichtige Formel ist in den folgenden Entwicklungen nicht benutzt worden.

S. 16 in Anm. 15 ist statt der Ungleichung $k \gtrless 1$ zu lesen:

$$k \gtrless l.$$

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Gemeinsam mit **W. Blaschke**, Hamburg, **M. Born**, Göttingen, **C. Runge**, Göttingen.

Herausgegeben von

R. Courant, Göttingen.

Neue Bände bzw. neue Auflagen liegen vor von:

Band XII

Methoden der mathematischen Physik. Von **R. Courant**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und **D. Hilbert**, Geh. Reg.-Rat, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Erster Band. Mit 29 Abbildungen. (XIV, 450 S.) 1924.
22.50 Goldmark; geb. 24 Goldmark / 5.40 Dollar; geb. 5.75 Dollar

Band XI

Vorlesungen über numerisches Rechnen. Von **C. Runge**, o. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und **H. König**, o. Professor der Mathematik an der Bergakademie Clausthal. Mit 13 Abbildungen. (VIII, 371 S.) 1924.
16.50 Goldmark; geb. 17.70 Goldmark / 3.95 Dollar; geb. 4.25 Dollar

Band X

Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. Von **J. A. Schouten**, ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Delft in Holland. Mit 7 Textfiguren. (X, 311 S.) 1924.
15 Goldmark; geb. 16.20 Goldmark / 3.60 Dollar; geb. 3.90 Dollar

Band II

Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Von Dr. **Konrad Knopp**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 12 Textfiguren. (X, 526 S.) 1924.
27 Goldmark; geb. 28 Goldmark / 6.45 Dollar; gebunden 6.70 Dollar

Band I

Vorlesungen über Differential-Geometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. I. Elementare Differentialgeometrie. Zweite, verbesserte Auflage. Mit einem Anhang von **Kurt Reidemeister**, Professor der Mathematik an der Universität Wien. Mit 40 Textfiguren. (XII, 242 S.) 1924.
11 Goldmark; gebunden 12 Goldmark / 2.65 Dollar; gebunden 2.90 Dollar

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN W 9

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Karl Ohrtmann und Felix Müller, fortgesetzt von Emil Lampe, gegenwärtig herausgegeben von Leon Lichtenstein. Band 46, Jahrgang 1916—1918, Heft 4 (Schluß des Bandes), S. 1281—1639. Siebenter und achter Abschnitt. (Relativitätstheorie und Astronomie.) Nachtrag. Das erste Heft des 47. Bandes, Jahrgang 1919—1920, wird in wenigen Wochen erscheinen. Bis Ende 1924 ist die Herausgabe des 47. Bandes und eines Teiles des 48. Bandes, Jahrgang 1921—1922, in Aussicht genommen.

Antiquariatskatalog Nr. 509 der Buchhandlung Gustav Fock. Mathematik. Zeitschriften und Sammelwerke, Handapparate, Bücher. Hierin u. a. die Bibliotheken von F. Müller, Th. Reye, R. Sturm, J. Thomae. Leipzig. 96 S.

N. Krainsky, Energetik der mechanischen Erscheinungen und die Grundlagen der Energetik, der Elektrophysik und Thermodynamik. Zlatar (Jugoslavien), V. Suligoj. 1924. 192 S.

J. Muica, Théorème de Fermat. 4ième édition. Bucarest, „Cartea Românească" S. A. 1924. 8 S.

Ganesh Prasad, Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co. 1923. 37 S. (Deutsch und englisch.)

Ludwig Schlesinger, Automorphe Funktionen. Göschens Lehrbücherei. 1. Gruppe. Reine Mathematik. Band 5. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig. 1924. X + 205 S. 8°.

M. de Broglie, Exposé concernant les résultats actuels relatifs aux éléments isotopes. Paris, Librairie scientifique J. Hermann. (1923.) 15 S. 8°.

M. Lecat, Compléments à la bibliographie des séries trigonométriques. Louvain. 1924. Chez l'auteur. 16 S. 8°.

A. W. Wasiljeff, Die ganze Zahl. Historische Skizze mit 24 Bildern und Zeichnungen und einer Tafel. Petrograd. 1922. 272 + IV S. Kl. 8°. (Geschichte der Zahlentheorie, russisch.)

Hierzu eine Beilage der Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.